УДК 517.982,256+517,518,152

М. И. Ганзбург, С. А. Пичугов

Об инвалидности элементов наулучшего приближения и одной теореме Глезера

В теории приближения функций хорошо известно, что для наилучшего приближения полиномами четной функции достаточно ограничиться четными полиномами. Покажем, что этот факт является типичным: при достаточно общих условиях инвариантность приближаемого элемента относительно непрерывной компактной группы преобразований влечет такую же инвариантность и для наилучших приближающих элементов. Далее, используя полученный результат, мы предлагаем новый способ доказательства утверждений типа теоремы Глезера [1].

1. Пусть банахово пространство B с нормой $\|\cdot\|_B$ и компактная топологическая группа G связаны следующим образом: каждому элементу $s \in G$ сопоставлен непрерывный линейный оператор $T_s : B \to B$, $\|T_s\| = 1$, причем $T_e = I$, $T_{st} — T_sT_t$ $(s \in G,\ t \in G)$, где e — единичный элемент G, I — тождественный оператор. Обозначим через B^G множество элементов $f \in B$, инвариантных относительно группы операторов T_s (т. е. удовлетворяющих условию $T_sf = f\ \forall s \in G$). Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство B, удовлетворяющее условиям: 1) $T_s\varphi \in \mathfrak{M}$ $\forall\varphi \in \mathfrak{M}$, $\forall s \in G$; 2) $\forall\varphi \in \mathfrak{M}$ функция $T_s\varphi$ непрерывна по s как функция из G в $\mathfrak{M}$.*

Тогда, если $f \in B^G$, то наилучшее приближение f подпространством $\mathfrak{M}$ в норме B реализуется на элементах из $\mathfrak{M}^G$, т. е.

$$E(f, \mathfrak{M}) \overset{\mathrm{def}}{=} \inf_{\varphi\in\mathfrak{M}} \|f - \varphi\|_B = \inf_{\varphi\in\mathfrak{M}^G} \|f - \varphi\|_B.$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ найдем элемент $\varphi \in \mathfrak{M}$ такой, что $\|f - \varphi\|_B \leqslant E(f, \mathfrak{M}) + \varepsilon$.

Ввиду компактности группы G на ней существует нормированная мера Хаара $\mu(s)$ (см., например, [2, с. 147]). Тогда условия 1) и 2) обеспечивают существование интеграла $\varphi_1 = \int\limits_G T_s\,\varphi d\mu(s)$ (см. [2, с. 89—90]), причем из замкнутости $\mathfrak{M}$ следует $\varphi_1 \in \mathfrak{M}$. Далее, в силу инвариантности меры μ относительно сдвигов получаем, что $\forall t \in G$

$$T_t\varphi_1 = \int\limits_G T_tT_s\varphi d\mu(s) = \int\limits_G T_s\varphi d\mu(s) = \varphi_1$$

(возможность внесения оператора T_s под знак инеграла доказана, например, в [2, с. 103]). И, наконец, используя инвариантность f относительно группы операторов T_s, получаем

$$\| f-\varphi_1 \|_B = \left\| \int_G T_s (f-\varphi)\, d\mu(s) \right\|_B \leqslant \int_G \| T_s (f-\varphi) \|_B d\mu(s) \leqslant$$
$$\leqslant \| f-\varphi \|_B \leqslant E(f, \mathfrak{M}) + \varepsilon.$$

Теорема доказана.

2. В некоторых частных случаях теорему 1 можно усилить.

Пусть G_m — компактная непрерывная группа преобразований m-мерного евклидового пространства R^m; K — компакт в R^m такой, что $\forall x \in K$ $\forall s \in G_m$ $sx \in K$, где sx — образ x при преобразовании s; $C(K)$ — банахово пространство непрерывных на K функций с нормой $\| f \|_{C(K)} = \max\limits_K | f |$; $\mathbf{P}^{(\beta)}_{n,m}$ — пространство алгебраических полиномов $P(x) = \sum\limits_{(\alpha,\beta)\leqslant n} c_\alpha x^\alpha$ от m переменных β-взвешенной степени n, где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$, $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ — мультииндексы, $(x, y) = \sum\limits_{i=1}^m x_i y_i$, $x, y \in R^m$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_m^{\alpha_m}$; при $\beta = (1, \ldots, 1)$ соответствующее пространство многочленов обозначим $\mathbf{P}_{n,m}$. Для $f \in C(K)$ положим

$$E^{(\beta)}_{n,m}(f; K) = \inf_{P \in \mathbf{P}^{(\beta)}_{n,m}} \| f-P \|_{C(K)}; \quad E_{n,m}(f; K) = \inf_{P \in \mathbf{P}_{n,m}} \| f-P \|_{C(K)}.$$

Далее обозначим через $\sigma_1(x), \ldots, \sigma_k(x)$ минимальную систему однородных образующих алгебры $\mathbf{P}^{G_m}_{n,m}$ и положим $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$; $R^m \to R^k$; кроме того, пусть $\sigma(E)$ обозначает образ множества $E \subset R^m$ при отображении σ. Имеет место теорема

Теорема 2. *Если $\sigma_i \in \mathbf{P}_{\beta_i,m}$, $\beta_i \geqslant 1$, $1 \leqslant i \leqslant k$, то для произвольной функции $f \in C(K)^{G_m}$ существует функция $g = g_f \in C(\sigma(K))$ такая, что $f(x) = g(\sigma(x))$ $\forall x \in K$ и выполняются равенства*

$$E_{n,m}(f; K) = \inf_{P \in \mathbf{P}^{G_m}_{n,m}} \| f-P \|_{C(K)} = E^{(\beta)}_{n,k}(g, \sigma(K)). \tag{1}$$

Доказательство. Пусть $P_r \in \mathbf{P}_{r,m}$ — полином наилучшего приближения степени r для f в метрике $C(K)$, $r = 0, 1, \ldots$. В силу теоремы 1 (при $T_s f(x) = f(sx)$) имеем $P_r \in \mathbf{P}^{G_m}_{r,m}$, причем $P_r = Q_r(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$, где $Q_r \in \mathbf{P}^{(\beta)}_{r,k}$, $r = 0, 1, \ldots$. Следовательно, полиномы Q_r при $r \to \infty$ равномерно на $\sigma(K)$ сходятся к некоторой функции $g \in C(\sigma(K))$ и при этом Q_n является полиномом наилучшего приближения β-взвешенной степени n для g в метрике $C(\sigma(K))$. Отсюда следует справедливость теоремы 2.

3. Приведем некоторые примеры применения теоремы 2. Пусть $B_r^m = \left\{ x \in R^m : |x|_m^2 = \sum\limits_{i=1}^m x_i^2 \leqslant r^2 \right\}$ — m-мерный шар.

1) G_m — группа вращений вокруг нуля, $\sigma_1(x) = |x|^2$. Полиномом наилучшего приближения степени n для $f \in C(B_r^m)^{G_m}$ будет полином вида $T(|x|^2)$, где $T \in \mathbf{P}_{\left[\frac{n}{2}\right],1}$ — наилучший полином для g_f на $[-r, r]$.

2) G_m — группа вращений вокруг вектора $\gamma \in B_1^m$, $\sigma_1(x) = (\gamma, x)$. Полином наилучшего приближения степени n для $f \in C(B_r^m)^{G_m}$ имеет вид $T((\gamma, x))$, где $T \in \mathbf{P}_{n,1}$ — полином наилучшего приближения для g_f на $[-r|\gamma|, r|\gamma|]$.

3) $G_m=\Gamma_m$ — группа подстановок множества $(1,\ldots,m)$, σ_i, $1\leqslant i\leqslant m$, — элементарные симметричные полиномы. Полиномом наилучшего приближения степени n для $f\in C(B_r^m)^{G_m}$ будет полином вида $T(\sigma_1,\ldots,\sigma_m)$, где $T\in\mathbf{P}_{n,m}^{(\beta)}$ — наилучший полином для g_f на $\sigma(B_r^m)$, $\beta=(1,\ldots,m)$.

4) $G_m=D^m$ — декартово произведение m групп $D=\{-1,1\}$, $\sigma_i(x)=x_i^2$, $1\leqslant i\leqslant m$. Полином наилучшего приближения степени n для $f\in C(B_r^m)^{G_m}$ имеет вид $T(x_1^2,\ldots,x_m^2)$, где $T\in\mathbf{P}_{\left[\frac{n}{2}\right],m}$ — наилучший полином для g_f на симплексе $\left\{x\in R^m:\sum_{i=1}^m x_i\leqslant r^2,\ x_i\geqslant 0,\ 1\leqslant i\leqslant m\right\}$.

4. Используем теорему 2 для исследования свойств функций, инвариантных относительно группы G_m и принадлежащих классу Жеврея $\mathbf{G}_\lambda(R^m)$, $\lambda\geqslant 1$ (по поводу определения см., например, [3]). Имеет место теорема.

Теорема 3. *Для произвольной функции $f\in\mathbf{G}_\lambda(R^m)^{G_m}$ существует функция $g\in\mathbf{G}_\lambda(\Omega^0)$, где $\Omega=\sigma(R^m)$, такая, что $f(x)=g(\sigma(x))\ \forall x\in R^m$.*

Для класса C^∞ утверждения глобального типа, подобные теореме 3, получены другими методами рядом авторов. В работе [1] (см. также [4, с. 162]) рассмотрен случай $G_m=\Gamma_m$; в [5], см. также [6, с. 83]) исследован случай $G_m=D^m$; в работах [7] и [8] получены подобные результаты в более общей ситуации.

Для доказательства теоремы 3 используем результат из работы [3].

Лемма. *Пусть A открытое множество в R^m и f непрерывна на A. Для того, чтобы $f\in\mathbf{G}_\lambda(A)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого компакта $K\in A$ существовали постоянные $L<\infty$ и $a\in(0,1)$ такие, что для всех натуральных n выполнялись неравенства $E_{n,m}(f;K)\leqslant La^{n^{\frac{1}{\lambda}}}$.*

Доказательство теоремы 3. В силу теоремы 2 для любого натурального l существует функция $g_l\in C(\Omega_l)$, где $\Omega_l=\sigma(B_l^m)$, такая, что $f(x)=g_l(\sigma(x))$. Отсюда следует существование функции g, непрерывной на Ω и такой, что $f(x)=g(\sigma(x))\ \forall x\in R^m$. Осталось доказать, что $g\in\mathbf{G}_\lambda(\Omega^0)$. Так как $f\in\mathbf{G}_\lambda(R^m)$, то, используя лемму и соотношение (1), получаем $(n=1,2,\ldots;\ l=1,2,\ldots)$

$$E_{n,k}(g,\Omega_l)\leqslant E_{n,k}^{(\beta)}(g;\Omega_l)=E_{n,m}(f;B_l^m)\leqslant La^{n^{\frac{1}{\lambda}}}. \tag{2}$$

В силу соотношения $\lim\limits_{x\to\infty}|\sigma(x)|_k=\infty$ имеем, что для любого компакта $K\subset\Omega^0$ существует l_0, для которого $K\subset\Omega_{l_0}$. Следовательно, из (2) и леммы вытекает принадлежность $g\in\mathbf{G}_\lambda(\Omega^0)$. Теорема доказана.

Замечание. Если вместо леммы воспользоваться конструктивной характеристикой класса C^∞ (см. [3]), то указанное доказательство применимо и для класса C^∞.

1. Glaeser G. Fonctions composees differentiables.— Ann. Math., 1963, 77, p. 193—209
2. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975, 448 с.
3. Baouendi M. S., Goulaouic C. Approximation polynomiale de fonctions C^∞ et analytigues.— Ann. Inst. Fourier (Grenoble), 1971, 21, № 4, p. 149—173.
4. Голубицкий М., Гийемин В. Устойчивые отображения и их особенности. М.: Мир, 1977, 290 с.
5. Whitney H. Differentiable even functions. — Duke J. of Math., 1943, № 10, p. 159—160.
6. Брёкер Т., Ландер Л. Дифференцируемые ростки и катастрофы. М.: Мир, 1977, 208 с.

* Ω^0 — внутренность множества Ω.

7. Schwarz G. W. Smooth functions invariant under the action of a compact Lie group — Topoloqy, 1975, **14**, № 1, p. 63—68.
8. Mather I. N. Differentiable invariants. —Topoloqy, 1977, **16**, № 2, p. 145—155.

Днепропетровский университет

Поступила в редакцию 12.06.1979 г.