УДК 517.521.8

А. Г. Демченко, А. П. Кохановский

Одно свойство некоторого класса преобразований типа Лапласа

В работе [1] доказано одно свойство методов суммирования Чезаро, названное (c)-свойством. В настоящей работе доказано аналогичное свойство для некоторого класса преобразований типа Лапласа. Оно применимо для получения тауберовых теорем и при изучении свойств методов Вороного.

1. Пусть дана функция $s(p)$ $(0 \leqslant p < \infty)$ и для всех $y > 0$ существует ее преобразование

$$\Phi(y) = \frac{1}{F(y)} \int_0^\infty e^{h(p) - \frac{p}{y}} s(p)\, dp,$$

где $h(p)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) $0 < h'(p) \to 0$ $(p \to \infty)$; 2) $h''(\bar{p}) < 0$; $-h''(p)$ не возрастает; $-p^2 h''(p)$ не убывает; 3) $\forall_{0<\delta<1} \int_0^\infty e^{\delta p^2 h''(p)} \times dp < \infty$; а $F(y) = \int_0^\infty e^{h(p) - \frac{p}{y}} dp$.

Теорема 1. *Пусть*

$$\forall_{0<\delta<1}\ s(p) = O(e^{-\delta p^2 h''(p)}). \tag{1}$$

Если $\Phi(y) \to s$ $(y \to \infty)$ *и замкнутое выпуклое множество* G *является* (c) — *множеством для функции* $s(p)$, *то* $s \in G$. *Если бесконечно удаленная точка является* (c)*-точкой функции* $s(p)$, *то* $\overline{\lim\limits_{y\to\infty}} |\Phi(y)| = \infty$. *)

Доказательство. Из свойств функции $h(p)$ следует, что а) $\lim \frac{h''(y)}{h''(x)} = 1$ $\left(1 < \frac{y}{x} \to 1\right)$, $x \to \infty$; в) существует функция $\psi(p) \to \infty$ $(p \to \infty)$ такая, что $-p^2 h''(p)/\psi^2(p) \to \infty$ $(p \to \infty)$; с) каждому достаточно большому числу y взаимно однозначно соответствует число m_y такое, что $h'(m_y) = \frac{1}{y}$.

При помощи формулы Тейлора убеждаемся в справедливости равенства

$$h(p) - h(m_y) - \frac{p}{y} = -\frac{m_y}{y} + \frac{1}{2}(p - m_y)^2 h''(\xi_p),$$

где ξ_p лежит между p и m_y.

Используя свойства функции $h(p)$ можно доказать такие два асимптотические соотношения:

---

* Определение (c)-множества и бесконечно удаленной (c)-точки см. в работах [1], [2].

а) $\displaystyle\int\limits_{m_y-\frac{m_y}{\psi(m_y)}}^{m_y+\frac{m_y}{\psi(m_y)}} e^{h(p)-\frac{p}{y}}\,dp \sim e^{\mu(y)}\sqrt{\frac{2\pi}{-h''(m_y)}} \quad (y\to\infty);$

в) $\displaystyle F(y)=\int\limits_0^{\infty} e^{h(p)-\frac{p}{y}}\,dp \sim \int\limits_{m_y(1-\lambda)}^{m_y(1+\lambda)} e^{h(p)-\frac{p}{y}}\,dp \quad (y\to\infty),$ где $0<\lambda<1,$

а $\mu(y)=h(m_y)-\dfrac{m_y}{y}$.

Если функцию $s(p)$ взять такую, что $s(p)=O\left(e^{-\delta p^2 h''(p)}\right)$, где $0<\delta< <\frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}\right)^2$, то рассуждая аналогично предыдущему, получим для $\Phi(y)$ представление:

$$\Phi(y)=\frac{1}{F(y)}\int\limits_{m_y(1-\lambda)}^{m_y(1+\lambda)} e^{h(p)-\frac{p}{y}} s(p)\,dp+o(1),\quad y\to\infty. \tag{2}$$

Теперь уже нетрудно доказать теорему 1. Итак, пусть G — (c) — множество $s(p)$. Обозначим через m_{y_k} середины отрезков $[n_k, m_k]$, фигурирующих в определении (c) — множества. Пусть y_k — число, соответствующее m_{y_k} согласно свойству c). Для произвольного $E>0$ всегда можно подобрать число $0<\lambda<1$ такое, что $s(p)\in G_\varepsilon$ для $m_{y_k}(1-\lambda)\leqslant p\leqslant m_{y_k}(1+\lambda)$, $k=1, 2, \ldots$.

Согласно теореме (см. [3], с. 115) равенство (2) можно представить следующим образом:

$$\Phi(y_k)=\varphi(y_k)\,c_k+o(1), \tag{3}$$

где $\varphi(y)\to 1\ (y\to\infty)$, а $c_k\in G_\varepsilon$.

Поэтому, если $\Phi(y)\to s\ (y\to\infty)$, то $s\in G_\varepsilon$. Отсюда, в силу произвольности $\varepsilon>0$, имеем $s\in G$. Если же бесконечно удаленная точка является (c) — точкой функции $s(p)$, то аналогично приходим к соотношению (3), где $c_k\in G_k$. Так как множества G_k стремятся к бесконечности, то $\overline{\lim\limits_{y\to\infty}}|\Phi(y)|=\infty$. Теорема доказана.

На основе теоремы 1 можно сформулировать ряд теорем тауберова типа (аналогично тому, как это сделано в работах [1], [2] для методов Чезаро).

2. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n\ (s_n=a_0+a_1+\ldots+a_n)$. Предполагая, что $p_n\geqslant 0$, $P_n=p_0+p_1+\ldots+p_n$, положим

$$W_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{\infty} p_{n-k}s_k.$$

Последовательность (W_n) называется последовательностью средних Вороного. В работе [4] доказано, что если удаленная точка комплексной плоскости (c) -точка последовательности (Sn), то она также (c) — точкой последовательности средних Чезаро целого неотрицательного порядка. Так как средние Чезаро являются одновременно и средними Вороного, то возникает вопрос: нельзя ли утверждение работы [4] перенести на весь класс методов суммирования Вороного? На этот вопрос дадим отрицательный ответ, доказав теорему 2, (частный случай дискретного аналога теоремы 1).

Теорема 2. *Пусть*

$$\Phi(x) = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^\alpha} s_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{n^\alpha} x^n} \quad (0 < \alpha < 1).$$

Если $\underset{0<\delta<1}{\forall}\ s_n = O(e^{\delta n^\alpha})$ *и* $\Phi(x) \to s,\ x \to 1-0,$ *то* $s \in G$, *где* G — *(с)-множество* (s_n). *Если бесконечно удаленная точка является (с)-точкой последовательности* (s_n), *то* $\lim\limits_{x\to 1-0} |\Phi(x)| = \infty$.

Рассмотрим многочлены

$$Q_k(x) = \Gamma_{n_k} x^{n_k} \left[1 - x^{n_k+1} \sum_{s=0}^{\nu_k} \binom{n_k + s}{s} (1-x)^s \right],$$

где $m_k = 2n_k$, $\rho_k = n_k^{\alpha-1}$ $(0 < \alpha < 1)$, $\nu_k = 40\left[\dfrac{n_k^\alpha}{1-\rho_k}\right]$, $n_{k+1} > m_k + \nu_k + 1$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\Gamma_{n_k}}{2^{n_k^\alpha}} < \infty$. Определим последовательность (s_n) равенством

$$\sum_{k=1}^{\infty} Q_k(x) = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n.$$

Пользуясь методом работы [5], можно показать, что (s_n) суммируется к нулю методом Абеля — Пуассона и что $s_n = 0(1)\Gamma_{n_k} n_k^{\nu_k}$. Положим $\Gamma_{n_k} = n_k$, $\alpha = \dfrac{1}{3}$ и $p_k = e^{\sqrt{k}} - e^{\sqrt{k-1}}$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $p_0 = 1$. Тогда, $s_n = n_k$ для $n_k \leqslant n \leqslant m_k$, а это значит, что бесконечно удаленная точка является (с)-точкой последовательности (s_n). С другой стороны

$$(1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \frac{1}{P(x)} \sum_{n=0}^{\infty} e^{\sqrt{n}} W_n x^n \to 0, \quad x \to 1-0 \tag{4}$$

и $s_n = 0(1) e^{\delta\sqrt{n}}$ при всех $0 < \delta < 1$.

Таким образом, если бы бесконечно удаленная точка являлась (с)-точкой последовательности (W_n), то согласно теореме 2 выражение в правой части равенства (4) было бы неограниченным при $x \to 1-0$, что противоречит суммируемости этой последовательности методом Абеля — Пуассона.

1. Давыдов Н. А. Об одном свойстве методов Чезаро суммирования рядов.— Мат. сб., 1956, 38, № 4, с. 506—524.
2. Давыдов Н. А. Об одном свойстве одного классаи нтегралов Стильтьеса.—Мат. сб., 1959, 48, № 4, с. 431—446.
3. Полиа Г., Сеге Г. Задачи и теоремы из анализа. М. —Л.: Гостехиздат, 1937, с. 319.
4. Михалин Г. А., Тесленко Л. С. Об одном свойстве некоторого класса $(R; p_n)$ — методов суммирования рядов и теоремы тауберова типа. Укр. мат. журн., 1977, 29, № 2, с. 194—203.
5. Давыдов Н. А. О (с)-точках последовательности, суммируемой методом Абеля — Пуассона.— Мат. сб., 1957, 43, № 1, с. 67—74.

Черкасский
педагогический институт

Поступила в редакцию 17.12.1979 г.
после переработки — 30.03.1981 г.