УДК 517.946.2

Ю. И. Ковач, И. В. Брич

Исследование одной нелинейной краевой задачи аналитическим двусторонним методом

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$y^{(m)}(x) = f(x, \gamma_1, \dots, \gamma_l, y(\lambda(x))) \equiv f[y] \tag{1}$$

с условиями

$$y(0) = 0, \quad y^{(m-2p)}(0) = 0, \quad y^{(m-2p)}(1) = 0, \tag{2}$$

где $m = 2k$ или $m = 2k + 1$, $p = 1, 2, \dots, k$; $\lambda(x) = x - \tau(x)$. Отклонение $\tau(x)$ — известная при $x \in [0, 1]$ непрерывная функция, определяющая соответственно начальное множество E при $\tau(x) \geqslant 0$ или S при $\tau(x) \leqslant 0$. Если $\tau(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$), имеем уравнение с запаздывающим (опережающим) аргументом, а при $\tau(x) \equiv 0$ имеем обыкновенную классическую задачу, в которой начальное множество E (S) состоит из точки $x = 0$ ($x = 1$).

Пусть

$$y(x)|_E = \varphi(x) \quad \text{или} \quad y(x)|_S = \psi(x), \tag{3}$$

причем $\varphi(0) = \varphi^{(m-2p)}(0) = 0$ или $\psi^{(m-2p)}(1) = 0$.

Оказывается, что алгоритм построения последовательностей функций $\{Z_{n+1}[x, \gamma]\}$, $\{V_{n+1}[x, \gamma]\}$ в двустороннем методе существенно зависит от четности или нечетности чисел k, поэтому следует рассматривать отдельно два случая: 1) k — четное; 2) k — нечетное.

Обозначим [1]

$$G(x, t) = \begin{cases} t(1 - x), & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ x(1 - t), & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases} \quad G^*(x, t) = \begin{cases} \dfrac{t}{2}(2x - x^2 - t), & 0 \leqslant t \leqslant x, \\ \dfrac{x}{2}(x - xt), & x \leqslant t \leqslant 1, \end{cases}$$

$$Hf[y] = (-1)^k \int_0^1 G(x, t_1)\,dt_1 \int_0^1 G(t_1, t_2)\,dt_2 \ldots \int_0^1 G(t_{k-1}, t_k)\, f[y]\,|_{x=t_k}\, dt_k,$$

$$H^*f[y] = (-1)^k \int_0^1 G^*(x, t_1)\,dt_1 \int_0^1 G(t_1, t_2)\,dt_2 \ldots \int_0^1 G(t_{k-1}, t_k)\, f[y]\,|_{x=t_k}\, dt_k.$$

Пусть в области

$$\overline{D} = \{x \in [0, 1], \gamma_1^{(0)} \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_1^{(1)}, \ldots, \gamma_l^{(0)} \leqslant \gamma_l \leqslant \gamma_l^{(1)}, \ [V_1(x), Z_1(x)]\}$$

правая часть уравнения (1) — непрерывная функция относительно x, параметров $\gamma_1, \ldots, \gamma_l$ и существуют производные первого порядка, удовлетворяющие условию

$$-N \leqslant \frac{\partial f}{\partial y(\lambda(x))} \leqslant N, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial y(\lambda(x))} - 2N\right| \leqslant (2\sqrt{2})^{2k}. \tag{4}$$

Обозначим

$$A_n[x, \gamma] = N\{Z_n[\lambda(x), \gamma] - V_n[\lambda(x), \gamma]\} \equiv A[Z_n - V_n],$$

$$\Omega[W_n] = \left(\frac{\partial f}{\partial y(\lambda(x))} - N\right) W_n[\lambda(x), \gamma].$$

Пусть $Z_1(x)$, $V_1(x)$ — функции класса $C_n[0, 1]$, удовлетворяющие условию (2), неравенствам

$$V_1(x) \leqslant Z_1(x), \quad V_1^{(m-2r)}(x) \geqslant Z_1^{(m-2r)}(x), \quad V_1^{(m-2s)}(x) \leqslant Z_1^{(m-2s)}(x) \tag{5}$$

($m = 2k$ или $m = 2k+1$, k — нечетное, $r = 0, 2, 4, \ldots, k-1$; $s = 1, 3, 5, \ldots, k$) и соотношениям

$$\begin{aligned} &Z_1^{(m)}(x) - f[C_1Z_1 + D_1V_1] + (C_1 - D_1)A_1[x, \gamma] = \alpha_1[x, \gamma] \leqslant 0, \\ &V_1^{(m)}(x) - f[C_1V_1 + D_1Z_1] - (C_1 - D_1)A_1[x, \gamma] = \beta_1[x, \gamma] \geqslant 0, \end{aligned} \tag{6}$$

причем эти функции на начальных множествах E или S удовлетворяют условию (3).

Практический метод построения таких функций см. в [1]. В дальнейшем будем считать, что k — нечетное, $m = 2k$. При $m = 2k+1$ оператор H везде следует заменить оператором H^*.

Определим последовательности функций при $m = 2k$ $\{Z_{n+1}[x, \gamma]\}$, $\{V_{n+1}[x, \gamma]\}$ по формулам

$$\begin{aligned} Z_{n+1}[x, \gamma] &= \begin{cases} \varphi(x), x \in E; \psi(x), x \in S; \\ H\{Q_nf[C_nZ_n + D_nV_n] + R_nf[C_nV_n + D_nZ_n] - \\ -(Q_n - R_n)(C_n - D_n)A_n[t_k, \gamma]\}, \ x \in [0, 1], \end{cases} \\ V_{n+1}[x, \gamma] &= \begin{cases} \varphi(x), x \in E; \ \psi(x), x \in S; \\ H\{Q_nf[C_nV_n + D_nZ_n] + R_nf[C_nZ_n + D_nV_n] + \\ +(Q_n - R_n)(C_n - D_n)A_n[t_k, \gamma]\}, \ x \in [0, 1], \end{cases} \end{aligned} \tag{7}$$

где R_n, Q_n, D_n, C_n — неотрицательные параметры, удовлетворяющие условиям

$$0 \leqslant R_p < Q_p, \quad 0 \leqslant D_p < C_p, \quad R_p + Q_p = 1, \quad D_p + C_p = 1, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

или

$$0 \leqslant Q_p < R_p, \quad 0 \leqslant D_p < C_p, \quad R_p + Q_p = 1, \quad D_p + C_p = 1, \quad p = 1, 2, 3, \ldots \tag{9}$$

которые можно определять различными способами (см. [2]).

Справедливы следующие теоремы, подробное изложение которых приведено в [1].

Теорема 1. *Пусть в области* $\overline{D}$ *функция* f *уравнения* (1) *непрерывна относительно* x, *параметров* $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ *и имеет ограниченные производные первого порядка, удовлетворяющие условию* (4), *и параметры* R_n, Q_n, D_n, C_n *удовлетворяют условиям* (8) *или* (9). *Если функции* $Z_1(x)$, $V_1(x)$ *класса* $C_n[0, 1]$, *удовлетворяющие условиям* (2) *и* (3), *неравенствам* (5) *и соотношениям* (6), *то в* $\overline{D}$ *справедливы неравенства* $V_1 \leqslant y[x, \gamma] \leqslant Z_1$, $Z_1^{(m-2r)} \leqslant y^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant V_1^{(m-2r)}$, $V_1^{(m-2s)} \leqslant y^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant Z_1^{(m-2s)}$, k — *нечетное*, $r = 0, 2, 4, \dots, k-1$; $s = 1, 3, 5, \dots, k$.

Теорема 2. *Пусть в области* $\overline{D}$ *функции* f *и* $Z_1(x)$, $V_1(x)$ *удовлетворяют условиям теоремы* 1. *Если параметры* R_n, Q_n, D_n, C_n, *удовлетворяющие условиям* (8), *такие что*

$$\begin{gathered}
Q_n\{\Omega[Z_n - Z_{n+1}] - D_n\Omega[Z_n - V_n] - A[V_{n+1} - V_n] + D_nA[Z_n - V_n]\} + \\
+ R_n\{\Omega[V_n - Z_{n+1}] + D_n\Omega[Z_n - V_n] - A[V_{n+1} - Z_n] - D_nA[Z_n - V_n]\} \leqslant 0, \\
Q_n\{\Omega[V_n - V_{n+1}] + D_n\Omega[Z_n - V_n] - A[Z_{n+1} - Z_n] - D_nA[Z_n - V_n]\} + \\
+ R_n\{\Omega[Z_n - V_{n+1}] - D_n\Omega[Z_n - V_n] - A[Z_{n+1} - V_n] + \\
+ D_nA[Z_n - V_n]\} \geqslant 0,
\end{gathered} \tag{10}$$

то последовательности функций $\{Z_{n+1}[x, \gamma]\}$, $\{V_{n+1}[x, \gamma]\}$, *определенные по формулам* (7), *удовлетворяют цепи неравенств*

$$\begin{gathered}
V_n[x, \gamma] \leqslant V_{n+1}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant y[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant Z_{n+1}[x, \gamma] \leqslant Z_n[x, \gamma], \\
Z_n^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant Z_{n+1}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant y^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant V_{n+1}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant \\
\leqslant V_n^{(m-2r)}[x, \gamma], \ V_n^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant V_{n+1}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant y^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant \dots \\
\dots \leqslant Z_{n+1}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant Z_n^{(m-2s)}[x, \gamma],
\end{gathered} \tag{11}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$; k — *нечетные*, $r = 0, 2, \dots, k-1$; $s = 1, 3, \dots, k$, *однако, если параметры* R_n, Q_n, D_n, C_n, *удовлетворяющие условиям* (9), *такие, что при* $n = 2\alpha - 1$ $(n = 2\alpha)$, $\alpha = 1, 2, \dots$ *знаки в неравенствах* (10) *противоположны (совпадают), то вместо неравенств* (11) *получим неравенства* $V_{2n-1}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n}[x, \gamma] \leqslant V_{2n+1}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n+2}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant y[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant V_{2n+2}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n+1}[x, \gamma] \leqslant V_{2n}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n-1}[x, \gamma]$, $Z_{2n-1}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant V_{2n}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n+1}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant V_{2n+2}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant y^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant Z_{2n+2}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant V_{2n+1}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n}^{(m-2r)}[x, \gamma] \leqslant V_{2n-1}^{(m-2r)}[x, \gamma]$, $V_{2n-1}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant V_{2n+1}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n+2}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant y^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant \dots \leqslant V_{2n+1}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n+1}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant V_{2n}^{(m-2s)}[x, \gamma] \leqslant Z_{2n-1}^{(m-2s)}[x, \gamma]$, $n = 1, 2, 3, \dots$; k — *нечетное*, $r = 0, 2, \dots, k-1$; $s = 1, 3, \dots, k$, *причем эти последовательности равномерно вместе со своими производными сходятся к* $y[x, \gamma]$ *и соответственным производным от* $y[x, \gamma]$, *где* $y[x, \gamma]$ — *единственное и непрерывное решение, как функции от* x *и параметров* $\gamma_1, \dots, \gamma_l$, *задачи* (1) — (3). *Это решение будет непрерывно как функция параметров* $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ *в области* $\gamma_1^{(0)} \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_1^{(1)}, \dots, \gamma_l^{(0)} \leqslant \gamma_l \leqslant \gamma_l^{(1)}$, *равномерно относительно* x *во всем интервале* $[0, 1]$.

Приведенные результаты распространяются на системы дифференциальных уравнений вида (1) и на различные задачи для широкого класса дифференциальных уравнений как обыкновенных, так и в частных производных с отклоняющимся аргументом, для которых приближенное решение искалось ранее нами двусторонним методом.

1. Ковач Ю. И., Брич И. В. Теорема о дифференциальном неравенстве и ее применение к исследованию одной нелинейной краевой задачи. Ч. 1. «Материалы 32 итог. науч. конф. проф.-преп. состава Ужгород. ун-та. Секц. мат. наук. Ужгород, 1978, 94—114. Рукопись деп. в ВИНИТИ 8 июня 1979 г. № 2079—79 Деп.
2. Ковач Ю. И., Ильяшенко Н. Ф. Аналитические двусторонние методы приближенного интегрирования дифференциальных уравнений (часть первая). Донецк. политехн. ин-т. Донецк, 1978, 37 с. Рукопись деп. в ВИНИТИ 6 февр. 1979 г., № 486—79 Деп.

Ужгородский
государственный университет

Поступила в редакцию 27.12.1979 г.,
после переработки — 3.12.1980 г.