УДК 517.968.4

Э. Н. Кротова

Об одном методе решения системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна

В этой статье рассматривается задача приближенного решения системы нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна с помощью одного варианта [1] метода осреднения функциональных поправок Ю. Д. Соколова [2].

1. Алгоритм приближенного решения. Рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений типа Гаммерштейна:

$$y_i(x)=\varphi_i(x)+\lambda_i\int_a^b K_i(x,\xi)\,f_i[\xi;y_1(\xi),\dots,y_m(\xi)]\,d\xi,\quad i=1,2,\dots,m, \tag{1}$$

где данные функции $\varphi_i(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$ и принимают на $[a,b]$ наибольшие Φ_i и наименьшие φ_i значения; $f_i(\xi;y_1,\dots y_m)$ — непрерывные функции своих аргументов в некоторой области D, определенной неравенствами:

$$a\leqslant x\leqslant b,\ \ a\leqslant\xi\leqslant b,\ \ -\nu_i+\varphi_i\leqslant y_i\leqslant\nu_i+\Phi_i\quad(\nu_i>0) \tag{2}$$

и удовлетворяют в D условию Липшица по переменным $y_1,\dots,y_m$:

$$|f_i(\xi;y_1^{(1)},\dots,y_m^{(1)})-f_i(\xi;y_1^{(2)},\dots,y_m^{(2)})|\leqslant\sum_{k=1}^{m}N_{ik}\,|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|, \tag{3}$$

где N_{ik} — постоянные, вообще зависящие от $\nu_1, \ldots, \nu_m$; функции $K_i(x, \xi)$ непрерывные почти всюду и ограниченные в области $a \leqslant x,\ \xi \leqslant b$ или $K_i(x, \xi) = \dfrac{\widetilde{K}_i(x, \xi)}{(x-\xi)^q}$, где $\widetilde{K}_i(x, \xi)$ — функции, непрерывные при $a \leqslant x,\ \xi \leqslant b$ и $0 < q < 1$; параметры λ_i — отличные от нуля действительные числа; все рассматриваемые переменные действительны.

В качестве нулевого приближения возьмем $y_{i0}(x) = 0$.

Для построения приближенного решения системы (1) с помощью данного варианта метода осреднения функциональных поправок положим в первом приближении

$$y_{i1}(x) = \varphi_i(x) + \lambda_i \int_a^b K_i(x, \xi)\{f_i(\xi, 0) + \beta_{i1}\}\, d\xi, \tag{4}$$

где

$$\beta_{i1} = \frac{1}{h}\int_a^\beta \{f_i[x; y_{i1}(x)] - f_i[x, 0]\}\, dx, \quad h = b - a. \tag{5}$$

Подставляя выражения для $y_{i1}(x)$ из (4) в (5), получаем систему уравнений для определения значения β_{i1}:

$$\beta_{i1} = \frac{1}{h}\int_a^b \left\{f_i\left[x; \varphi_i(x) + \lambda_i \int_a^b K_i(x, \xi)[f_i[\xi, 0) + \beta_{i1}]\, d\xi\right] - f_i(x, 0)\right\} dx. \tag{6}$$

Предположив, что эта система разрешима относительно β_{i1}, второе приближение определим следующим образом:

$$y_{i2}(x) = \varphi_i(x) + \lambda_i \int_a^b K_i(x, \xi)\{f_i[\xi; y_{11}, \ldots, y_{m1}] + \beta_{i2}\}\, d\xi, \tag{7}$$

где

$$\beta_{i2} = \frac{1}{h}\int_a^b \{f_i(x; y_{12}, y_{22}, \ldots, y_{m2}) - f_i(x; y_{11}, \ldots, y_{m1})\}\, dx, \quad i = 1, 2, \ldots m. \tag{8}$$

Подставляя в (8) выражения для $y_{i2}(x)$ и $y_{i1}(x)$ соответственно из формул (4) и (7), получаем систему уравнений для определения значения β_{i2}. Предполагая существование действительного решения этой системы, определяем значение β_{i2}, и продолжая процесс таким же образом, n-ое приближение определим формулами

$$y_{in}(x) = \varphi_i(x) + \lambda_i \int_a^b K_i(x, \xi)\{f_i[\xi; y_{1\overline{n-1}}, \ldots, y_{m\overline{n-1}}] + \beta_{in}\}\, d\xi, \tag{9}$$

где

$$\beta_{in} = \frac{1}{h}\int_a^b \{f_i[x; y_{1n}, \ldots, y_{mn}] - f_i[x; y_{1\overline{n-1}}, \ldots, y_{m\overline{n-1}}]\}\, dx, \quad n = 1, 2, \ldots m. \tag{10}$$

Подставляя в (10) выражения для $y_{in}(x)$ и $y_{i\overline{n-1}}(x)$ согласно формулам (9) и предполагая существование действительного решения полученной системы, определяем значение β_{in} и соответственно значение $y_{in}(x)$.

Представим выражение для $y_{in}(x)$ в следующем виде:

$$y_{in}(x) = \varphi_i(x) + \lambda_i \int_a^b [K_i(x, \xi) - R_i(x)]\, f_i[\xi, y_{i\overline{n-1}}(\xi)]\, d\xi + \\ + \lambda_i \int_a^b R_i(x)\, f_i[\xi, y_{in}(\xi)]\, d\xi, \tag{11}$$

где

$$R_i(x) = \frac{1}{h}\int_a^b K_i(x, \xi)\, d\xi, \quad i = 2, \ldots, m. \tag{12}$$

2. Достаточные условия, при которых все последующие приближения $y_{in}(x)$ остаются в области D.

1. Если в области D, определенной неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant \xi \leqslant b, \quad -\nu_i + \varphi_i \leqslant y_i \leqslant \nu_i + \Phi_i, \tag{13}$$

функции $f_i[x; y_i(x)]$ удовлетворяют условиям

$$|f_i(x; y_1, \ldots, y_m)| \leqslant F_i(\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m), \tag{14}$$

а условия для функций $f_i[x, y_i(x)]$ из первого раздела не выполняются при всех действительных значениях $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots m)$, то подчиняем ν_i условиям

$$|\lambda_i|(K_{i1} + R_{i1}) F_i(\nu_i) = \nu_i, \tag{15}$$

где

$$\int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)|\, d\xi \leqslant K_{i1}, \quad h|R_i(x)| \leqslant R_{i1}. \tag{16}$$

Действительно, предполагая, что $|f_i(\xi, 0)| \leqslant F_i(\nu_i)$, при $n = 1$ согласно формуле (11) получаем: $|\lambda_i| \int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)| \cdot |f_i(\xi, 0)|\, d\xi + {}$ $+ |\lambda_i| \int_a^b |R_i(x)| \cdot |f_i[\xi, y_{i1}(\xi)]|\, d\xi \leqslant |\lambda_i| K_{i1} F_i(\nu_i) + |\lambda_i| R_{i1} F_i(\nu_i) = \nu_i$ при любых $y_{i1}(x)$ из области D. Отсюда очевидно, что интегральные операторы $|\lambda_i| \int_a^b [K_i(x, \xi) - R_i(x)] f_i(\xi, 0) + \lambda_i \int_a^b R_i(x) f_i[\xi, y_{i1}]\, d\xi$ переводят область D в себя. Эти операторы в пространстве $C(a, b)$ удовлетворяют условию Липшица с постоянными $M_i = |\lambda_i| \sum_{k=1}^{m} R_{i1} N_{ik}$. Предположим, что $M_i < 1$. Тогда, исходя из принципа сжатых отображений, получим, что система уравнений (11) имеет в области D единственное решение $y_{i1}(x)$ (при $n = 1$).

Аналогично можем показать, что система (11) при условиях (14), (15) и $M_i < 1$ имеет в области D единственное решение $y_{in}(x)$ при любом n, т. е. $-\nu_i + \varphi_i \leqslant y_{in} \leqslant \nu_i + \Phi_i$.

2. В случае, если область D определена неравенствами

$$a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant \xi \leqslant b, \quad p_i \leqslant y_i \leqslant P_i \tag{17}$$

и в этой области функции $f_i[x, y_i(x)]$ неотрицательны и ограничены

$$0 \leqslant f_i \leqslant f_i[x, y_{i1}(x)] \leqslant F_i, \quad 0 \leqslant f_i \leqslant f(x, 0) \leqslant F_i, \tag{18}$$

то значения p_i и P_i определяем из условий

$$P_i = \Phi_i + K_i F_i + K_i(F_i - f_i), \quad p_i = \varphi_i - K_i F_i - K_i(F_i - f_i), \tag{19}$$

где

$$\int_a^b |K_i(x, \xi)|\, d\xi \leqslant K_i.$$

Совершенно очевидно, что при этих условиях и условии $M_i < 1$ система уравнений (11) имеет единственное решение, принадлежащее области D, т. е. $p_i \leqslant y_{in} \leqslant P_i$.

Аналогичные заключения имеем и в случае $f_i[x, y_{i1}(x)] \leqslant 0$, $f(x, 0) \leqslant 0$.

3. Достаточные условия сходимости алгоритма.

1. Запишем выражения для $\delta y_{in}(x) = y_{in}(x) - y_{\overline{in-1}}(x)$, $n = 2, 3, \ldots$, согласно формулам (11):

$$\delta y_{in}(x) = \lambda_i \int_a^b [K_i(x, \xi) - R_i(x)] \{f_i[\xi, y_{\overline{in-1}}(\xi)] - f_i[\xi, y_{\overline{in-2}}(\xi)]\} d\xi +$$

$$+ \lambda_i \int_a^b R_i(x) \{f_i[\xi, y_{in}(\xi)] - f_i[\xi, y_{\overline{in-1}}(\xi)]\} d\xi. \quad (20)$$

Далее:

$$|\delta y_{in}(x)| \leqslant |\lambda_i| \int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)| \, |f_i[\xi, y_{\overline{in-1}}(\xi)] - f_i[\xi, y_{\overline{in-2}}(\xi)]| \, d\xi +$$

$$+ |\lambda_i| \int_a^b |R_i(x)| \, |f_i[\xi, y_n(\xi)] - f_i[\xi, y_{\overline{in-1}}(\xi)]| \, d\xi. \quad (21)$$

Введем обозначения:

$$\max_i |\lambda_i| = l, \quad \max_i |\delta y_{in}(x)| = C_n, \quad n = 1, 2, \ldots. \quad (22)$$

Тогда

$$C_n \leqslant lK_1NC_{n-1} + lR_1NC_n, \quad (23)$$

где под K_1N и R_1N подразумеваем соответственно наибольшие из величин $K_{i1} \sum_{k=1}^{m} N_{ik}$, $R_{i1} \sum_{k=1}^{m} N_{ik}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Из неравенства (23) при условии $lR_1N < 1$ получим

$$C_n \leqslant \frac{lK_1N}{1 - lR_1N} C_{\overline{n-1}} = \varepsilon_0 C_{\overline{n-1}} \leqslant \varepsilon_0^{n-1} C_1, \quad (24)$$

где

$$\varepsilon_0 = \frac{lK_1N}{1 - lR_1N}, \quad C_1 = \max_i |y_{i1}(x)|. \quad (25)$$

Достаточное условие сходимости алгоритма в данном случае:

$$\varepsilon_0 < 1, \quad lR_1N < 1. \quad (26)$$

2. Если функции $K_i(x, \xi)$ интегрируемы вместе со своими квадратами, то применяя известные интегральные неравенства к неравенствам (21), получим

$$\sqrt{\int_a^b |\delta y_{in}(x)| \, dx} \leqslant |\lambda_i| \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)|^2 d\xi dx \times}$$

$$\overline{\times \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{m} N_{ik}\right)^2 |\delta y_{\overline{in-1}}(\xi)|^2 d\xi} + |\lambda_i| \sqrt{\int_a^b R_i^2(x) \, dx \int_a^b \left(\sum_{k=1}^{m} N_{ik}\right)^2 |\delta y_{in}(\xi)|^2 d\xi}. \quad (27)$$

Для сокращения записи введем обозначения:

$$\max_i \sqrt{\int_a^b |\delta y_{in}(x)|^2 \, dx} \leqslant \widetilde{C}_n, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$

$$\max \sqrt{\int_a^b \int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)|^2 \, dx d\xi} \leqslant K_{i2}, \quad \max_i \sqrt{\int_a^b R_i^2(x) \, dx} \leqslant R_{i2}. \quad (28)$$

Далее, обозначая наибольшую из сумм $\sum_{k=1}^{m} K_{i2}N_{ik}$ и $\sum_{k=1}^{m} R_{i2}N_{ik}$ соответственно через K_2N и R_2N и предполагая, что $lR_2N<1$, имеем:

$$\widetilde{C}_n \leqslant \frac{lK_2N}{1-lR_2N}\widetilde{C}_{\overline{n-1}} = \varepsilon_1\widetilde{C}_{\overline{n-1}} \leqslant \varepsilon_1^{n-1}\widetilde{C}_1, \tag{29}$$

где

$$\varepsilon_1 = \frac{lK_2N}{1-lR_2N} \text{ и } C_1 = \max\sqrt{\int_a^b |y_{i1}(x)|^2 dx}. \tag{30}$$

В данном случае условия сходимости алгоритма будет выражаться неравенствами

$$\varepsilon_1 < 1,\ lR_2N < 1. \tag{31}$$

3. Для рассматриваемого варианта метода Ю. Д. Соколова имеют место следующие признаки сходимости.

Предполагаем, что в данной области D функции $f_i[x, y_i(x)]$ удовлетворяют условия

$$|f_i(\xi, y_1^{(1)}, \ldots, y_m^{(1)}) - f_i(\xi, y_1^{(2)}, \ldots, y_m^{(2)})| \leqslant \sum_{k=1}^{m} N_{ik}(\xi)\,|y_i^{(1)} - y_i^{(2)}| \tag{32}$$

Используя формулы (21) и (22), получаем

$$C_n \leqslant \frac{lK_3}{1-lR_3} = \varepsilon_2 C_{\overline{n-1}} \leqslant \varepsilon_2^{n-1} C_1, \tag{33}$$

где

$$\max_i \int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)| \sum_{k=1}^{m} N_{ik}(\xi)\, d\xi = K_3,$$

$$\max_i \int_a^b |R_i(x, \xi)| \sum_{k=1}^{m} N_{ik}(\xi)\, d\xi = R_3,\ \varepsilon_2 = \frac{lK_3}{1-lR_3}. \tag{34}$$

В этом случае условия сходимости будет иметь вид:

$$\varepsilon_2 < 1,\ lR_3 < 1. \tag{35}$$

4. В случае, если все функции $K_i(x, \xi)$ интегрируемы вместе со своими квадратами и выполняются условия (32), получаем

$$\sqrt{\int_a^b |\delta y_{in}(x)| dx} \leqslant |\lambda_i| \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)|^2 \left(\sum_{k=1}^{m} N_{ik}(\xi)\right)^2 dx d\xi \times \int_a^b |\delta y_{i\overline{n-1}}(x)|^2 dx} + |\lambda_i| \sqrt{\int_a^b\int_a^b R_i^2(x) \left(\sum_{k=1}^{m} N_{ik}(\xi)\right)^2 dx d\xi \cdot \int_a^b |\delta y_n(\xi)|^2 d\xi}. \tag{36}$$

Введем обозначения:

$$\max_i \sqrt{\int_a^b |\delta y_{in}(x)|^2 dx} = \widetilde{C}_n,$$

$$\max_i \sqrt{\int_a^b\int_a^b |K_i(x, \xi) - R_i(x)|^2 \left(\sum_{k=1}^{m} N_{ik}(\xi)\right)^2 dx d\xi} = K_4,$$

$$\max_i \sqrt{\int_a^b\int_a^b R_i^2(x) \left(\sum_{k=1}^{m} N_{ik}(\xi)\right)^2 dx d\xi} = R_4. \tag{37}$$

Получим следующее:

$$\widetilde{C}_n \leqslant \frac{lK_4}{1-lR_4}\widetilde{C}_{n-1} = \varepsilon_3\widetilde{C}_{n-1} \leqslant \varepsilon_3^{n-1}\widetilde{C}_1,$$

где

$$\varepsilon_3 = \frac{lK_4}{1 - lR_4}, \quad \max_i \sqrt{\int_a^b |y_{i1}(x)|^2 dx} = \widetilde{C}_1. \tag{38}$$

Достаточным условием сходимости алгоритма будет неравенство $\varepsilon_3 < 1$, $lR_4 < 1$.

4. Оценка погрешности n-го приближения. Так как $y_i(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta y_{ik}(x)$, $i = 1, 2, \ldots, m$, а $y_{in}(x) = \sum_{k=1}^{n} \delta y_{ik}(x)$, $n = 1, 2, \ldots$, то

$$|y_{in}(x) - y_i(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |\delta y_{ik}(x)|. \tag{29}$$

Подставляя в неравенство (39) ранее выведенные оценки для $|\delta y_{ik}(x)|$ в соответствии с формулами (24), (29), (33) и (38) получаем следующие оценки погрешности n-ых приближений:

$$\begin{aligned}
&1) \quad |y_{in}(x) - y_i(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_0^{k-1} C_1 = \frac{\varepsilon_0^n}{1 - \varepsilon_0} C_1,\\
&2) \quad |y_{in}(x) - y_i(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_1^{k-1} \widetilde{C}_1 = \frac{\varepsilon_1^n}{1 - \varepsilon_1} \widetilde{C}_1,\\
&3) \quad |y_{in}(x) - y_i(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_2^{k-1} \widetilde{C}_1 = \frac{\varepsilon_2^n}{1 - \varepsilon_2} C_1,\\
&4) \quad |y_{in}(x) - y_i(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \varepsilon_3^{k-1} \widetilde{C}_1 = \frac{\varepsilon_2^n}{1 - \varepsilon_3}, \quad n = 1, 2, \ldots .
\end{aligned} \tag{40}$$

Примеры.

В качестве примера рассмотрим систему нелинейных интегральных уравнений, приведенную в работе [2], для решения которой применен основной вариант метода осреднения функциональных поправок: $y_1(x) = 1 + \frac{2}{15} x \int_0^1 [y_1^2(\xi) + y_2(\xi)] d\xi$; $y_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{x}{9} \int_0^1 [y_1(\xi) + y_2^2(\xi)] d\xi$, имеющую 4 действительные решения вида $y_1 = 1 + k_1 x$, $y_2 = \frac{1}{2} + k_2 x$, причем наименьшие значения $k_1 = 0{,}246389\ldots$; $k_2 = 0{,}162589\ldots$.

Для решения этой системы используем указанный в данной работе вариант метода осреднения функциональных поправок.

В первом приближении найдем $y_{11} = 1 + \frac{2}{15} x\beta_{11}$; $y_{21} = \frac{1}{2} + \frac{1}{9} x\beta_{21}$ причем β_{11} и β_{21} определяются системой уравнений $\beta_{11} = \int_0^1 [y_{11}^2(x) + y_{21}(x)] dx$; $\beta_{21} = \int_0^1 [y_{11}(x) + y_{21}^2(x)] dx$ или $\beta_{11} = 1{,}5 + 0{,}13333\beta_{11} + 0{,}00593\beta_{11}^2 + 0{,}05556\beta_{21}$, $\beta_{21} = 1{,}25 + 0{,}06667\beta_{11} + 0{,}05556\beta_{21} + 0{,}00412\beta_{21}^2$. Решая полученную алгебраическую систему, получаем $\beta_{11} = 1{,}847938$, $\beta_{21} = 1{,}463327$. Тогда в первом приближении получаем почти точное решение $y_{11} = 1 + 0{,}246384x$; $y_{21} = 1/2 + 0{,}162592x$.

Наибольшие погрешности y_{11} и y_{21} составляют соответственно —0,00005 %, 0,00003%, а соответственные погрешности y_{11} и y_{21}, найденные с помощью основного варианта метода осреднения функциональных поправок [2] равны —0,066 % и —0,048 %.

1. Король Е. М. Про один варіант методу усереднення функціональних поправок Ю. Д. Соколова, 1969, **21**, № 1, с. 107—113.
2. Соколов Ю. Д. Метод осреднения функциональных поправок. К.: Наук. думка, 1967. 336 с.
3. Лучка А. Ю. Теория и применение метода осреднения функциональных поправок. К. Изд-во АН УССР, 1963. 128 с.
4. Курпель Н. С. Проекционно-итеративные методы решения операторных уравнений. К.: Наук. думка, 1968. 244 с.

Институт кибернетики
АН УССР

Поступила в редакцию 27.12.1979 г.,
после переработки 20.11.1980 г.