В. М. Федорчук

Нерасщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре $P\ (1, 4)$

В работе [1] предложен метод описания всех подалгебр произвольной алгебры Ли с нетривиальным идеалом, с помощью которого найдены подалгебры алгебры Ли группы Пуанкаре $P\ (1, 3)$.

В данной заметке этот метод применяется к изучению подгрупповой структуры обобщенной группы Пуанкаре $P(1,4)$*.

Группа $P\ (1,4)$ [2] представляет собой совокупность линейных неоднородных преобразований пятимерного пространства $(x_0,\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$

$$x'_\mu = \sum_{\nu=0}^{4} \Lambda_{\mu\nu} x_\nu + a_\mu, \quad \mu = 0, 1, 2, 3, 4, \tag{1}$$

где $\Lambda_{\mu\nu}$ и a_μ — числа, которые оставляют инвариантной следующую квадратичную форму:

$$x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2\,. \tag{2}$$

Алгебра Ли L группы $P\ (1, 4)$ образована 15 генераторами $M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu}$ и P'_μ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$ удовлетворяющими соотношениям

$$\begin{gathered}[P'_\mu, P'_\nu] = 0, \quad [M_{\mu\nu}, P'_\sigma] = g_{\mu\sigma} P'_\nu - g_{\nu\sigma} P'_\mu\,, \\ [M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = g_{\mu\rho} M_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma} M_{\mu\rho} - g_{\nu\rho} M_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma} M_{\nu\rho}\,,\end{gathered} \tag{3}$$

где $g_{\mu\nu}$ $(\mu, \nu = 0, 1, 2, 3, 4)$ — метрический тензор с компонентами $g_{00} = -g_{11} = -g_{22} = -g_{33} = -g_{44} = 1$, $g_{\mu\nu} = 0$ если $\mu \neq \nu$. Базисные элементы P'_μ $(\mu = 0, 1, 2, 3, 4)$ образуют абелевый идеал N алгебры Ли группы $P\ (1, 4)$.

Перейдем от $M_{\mu\nu}$ и P'_μ к следующим линейным комбинациям

$$\begin{gathered}G = M_{40},\ L_1 = M_{32},\ L_2 = -M_{31},\ L_3 = M_{21},\ P_a = M_{4a} - M_{a0}, \\ C_a = M_{4a} + M_{a0} \quad (a = 1, 2, 3), \\ X_0 = \frac{1}{2}(P'_0 - P'_4), \quad X_k = P'_k\ (k = 1, 2, 3), \quad X_4 = \frac{1}{2}(P'_0 + P'_4).\end{gathered} \tag{4}$$

В работе [3] найдены расщепляющиеся подалгебры $P_{j,k}$ алгебры Ли группы $P\ (1, 4)$ т. е. подалгебры, которые могут быть записаны в виде:

$$P_{j,k} = F_j \overset{0}{+} N_{jk}, \quad F_j \subseteq F = \frac{L}{N}\,, \quad N_{jk} \subseteq N. \tag{5}$$

---

* Эта задача поставлена автору В. И. Фущичем.

В формуле (5) при помощи F_j обозначено подалгебры однородной группы 0 (1,4) [4, 5].

Применяя предложенный в работе [1] метод, мы нашли 378 представителей $\widetilde{P}_{j,k}$ сопряженных классов непрерывных, нерасщепляющихся подалгебр алгебры Ли группы P (1,4), т. е. подалгебр, для которых базис может быть выбран в виде:

$$\widetilde{B}_k = B_k + \sum_i C_{ki} X_i, \qquad \sum_j d_{rj} X_j. \tag{6}$$

Сопряжение рассматривалось относительно группы внутренних автоморфизмов А. В формуле (6) C_{ki} и d_{rj} — константы (не равны нулю одновременно), которые не могут быть преобразованы одновременно в нуль элементом из А. B_i $(i = 1, \ldots, d(F))$ и X_k $(k = 1, \ldots, d(N))$ — базисы, выбранные в F и N соответственно.

Полный список найденных нами нерасщепляющихся подалгебр $\widetilde{P}_{j,k}$ ввиду его громоздкости, не приводим. Ниже мы приводим базисные элементы и коммутационные соотношения только для 8-мерных подалгебр $\widetilde{P}_{j,k}$ (k — нумерует все подалгебры, полученные из данного F_j).

Подалгебра $\widetilde{P}_{3,7}$ задается базисными элементами

$$G + aX_3,\ L_3 + bX_3,\ P_1, P_2, P_3,\ X_1, X_2, X_4\ \ (a, b \neq 0) \tag{7}$$

и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}
[G + aX_3,\ L_3 + bX_3] = 0, \quad [G + aX_3, P_1] = -P_1, \quad [G + aX_3, P_2] = -P_2,\\
[G + aX_3, P_3] = -P_3 - 2aX_4, \quad [G + aX_3, X_1] = [G + aX_3, X_2] = 0,\\
[G + aX_3, X_4] = -X_4, \quad [L_3 + bX_3, P_1] = P_2, \quad [L_3 + bX_3, P_2] = -P_1,\\
[L_3 + bX_3, P_3] = -2bX_4, \quad [L_3 + bX_3, X_1] = X_2,\\
[L_3 + bX_3, X_2] = -X_1, \quad [L_3 + bX_3, X_4] = 0, \quad [P_k, P_l] = 0\\
(k, l = 1, 2, 3), \quad [P_m, X_n] = 2X_4\delta_{m,n}\ (m = 1, 2, 3;\ n = 1, 2, 4),\\
[X_r, X_s] = 0 \quad (r, s = 1, 2, 4).
\end{gathered} \tag{8}$$

Подалгебра $\widetilde{P}_{3,8}$ задается базисными элементами

$$G + aX_3,\quad L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\quad (a \neq 0). \tag{9}$$

Если в (8) положить $b \equiv 0$, то получим коммутационные соотношения для генераторов (9).

Подалгебра $\widetilde{P}_{3,9}$ задается базисными элементами

$$G,\ L_3 + bX_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_4\ \ (b \neq 0). \tag{10}$$

Если в (8) положить $a \equiv 0$, то получим коммутационные соотношения для генераторов (10).

Подалгебра $\widetilde{P}_{4,7}$ задается базисными элементами

$$L_3 + X_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3 + \tilde{h}_0 X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\ \ (\tilde{h}_0 \neq 0). \tag{11}$$

и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}
[L_3 + X_0, P_1] = P_2 - X_1, \quad [L_3 + X_0, P_2] = -P_1 - X_2,\\
[L_3 + X_0,\ P_3 + \tilde{h}_0 X_0] = -X_3, \quad [L_3 + X_0, X_1] = X_2,\\
[L_3 + X_0, X_2] = -X_1, \quad [L_3 + X_0, X_3] = 0, \quad [L_3 + X_0, X_4] = 0,\\
[P_1, P_2] = 0, \quad [P_1, P_3 + \tilde{h}_0 X_0] = \tilde{h}_0 X_1, \quad [P_1, X_k] = 2X_4\delta_{1,k},
\end{gathered} \tag{12}$$

$$[P_2, P_3+\tilde{h}_0X_0]=\tilde{h}_0X_2, \quad [P_2, X_k]=2X_4\delta_{2,k},$$
$$[P_3+\tilde{h}_0X_0, X_k]=2X_4\delta_{3,k}, \quad [X_k, X_l]=0 \quad (k, l=1, 2, 3, 4).$$

Подалгебра $\tilde{P}_{4,8}$ задается базисными элементами

$$L_3-X_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3+\tilde{h}_0X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4\ (\tilde{h}_0\neq 0) \tag{13}$$

и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}[L_3-X_0, P_1]=P_2+X_1, \quad [L_3-X_0, P_2]=-P_1+X_2,\\ [L_3-X_0,\ P_3+\tilde{h}_0X_0]=X_3, \quad [L_3-X_0, X_1]=X_2,\\ [L_3-X_0, X_2]=-X_1, \quad [L_3-X_0, X_3]=0, \quad [L_3-X_0, X_4]=0,\\ [P_1, P_2]=0, \quad [P_1, P_3+\tilde{h}_0X_0]=\tilde{h}_0X_1,\\ [P_1, X_k]=2X_4\delta_{1,k}, \quad [P_2, P_3+\tilde{h}_0X_0]=\tilde{h}_0X_2, \quad [P_2, X_k]=2X_4\delta_{2,k},\\ [P_3+\tilde{h}_0X_0, X_k]=2X_4\delta_{3,k}, \quad [X_k, X_l]=0 \quad (k, l=1, 2, 3, 4).\end{gathered} \tag{14}$$

Подалгебра $\tilde{P}_{4,9}$ задается базисными элементами

$$L_3+X_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4. \tag{15}$$

Если в (12) положить $\tilde{h}_0\equiv 0$, то получим коммутационные соотношения для генераторов (15).

Подалгебра $\tilde{P}_{4,10}$ задается базисными элементами

$$L_3-X_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4. \tag{16}$$

Если в (14) положить $\tilde{h}_0\equiv 0$, то получим коммутационные соотношения для генераторов (16).

Подалгебра $\tilde{P}_{4,11}$ задается базисными элементами

$$L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3+X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{17}$$

и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}[L_3, P_1]=P_2, \quad [L_3, P_2]=-P_1, \quad [L_3, P_3+X_0]=0,\\ [L_3, X_1]=X_2, \quad [L_3, X_2]=-X_1, \quad [L_3, X_3]=0,\\ [L_3, X_4]=0, \quad [P_1, P_2]=0, \quad [P_1, P_3+X_0]=X_1,\\ [P_1, X_k]=2X_4\delta_{1,k}, \quad [P_2, P_3+X_0]=X_2,\\ [P_2, X_k]=2X_4\delta_{2,k}, \quad [P_3+X_0, X_k]=2X_4\delta_{3,k}, \quad [X_k, X_l]=0 \quad (k, l=1, 2, 3, 4).\end{gathered} \tag{18}$$

Подалгебра $\tilde{P}_{4,12}$ задается базисными элементами

$$L_3,\ P_1,\ P_2,\ P_3-X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_3,\ X_4 \tag{19}$$

и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}[L_3, P_1]=P_2, \quad [L_3, P_2]=-P_1, \quad [L_3, P_3-X_0]=0,\\ [L_3, X_1]=X_2, \quad [L_3, X_2]=-X_1, \quad [L_3, X_3]=0,\\ [L_3, X_4]=0, \quad [P_1, P_2]=0, \quad [P_1, P_3-X_0]=-X_1,\\ [P_1, X_k]=2X_4\delta_{1,k}, \quad [P_2, P_3-X_0]=-X_2, \quad [P_2, X_k]=2X_4\delta_{2,k},\\ [P_3-X_0, X_k]=2X_4\delta_{3,k} \quad [X_k, X_l]=0 \quad (k, l=1, 2, 3, 4).\end{gathered} \tag{20}$$

Подалгебра $\widetilde{P}_{8,9}$ задается базисными элементами

$$G+a_3X_3,\quad L_3+d_3X_3,\quad P_1, P_2,\quad X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\ (a_3, d_3\neq 0) \tag{21}$$

и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}
[G+a_3X_3,\quad L_3+d_3X_3]=0,\quad [G+a_3X_3, P_1]=-P_1,\\
[G+a_3X_3, P_2]=-P_2,\quad [G+a_3X_3, X_0]=X_0,\\
[G+a_3X_3, X_1]=0,\quad [G+a_3X_3, X_2]=0,\\
[G+a_3X_3, X_4]=-X_4,\quad [L_3+d_3X_3, P_1]=P_2,\\
[L_3+d_3X_3, P_2]=-P_1,\quad [L_3+d_3X_3, X_0]=0,\\
[L_3+d_3X_3, X_1]=X_2,\quad [L_3+d_3X_3, X_2]=-X_1,\\
[L_3+d_3X_3, X_4]=0,\quad [P_1, P_2]=0,\quad [P_1, X_0]=X_1,\\
[P_1, X_1]=2X_4,\quad [P_1, X_2]=0,\quad [P_1, X_4]=0,\\
[P_2, X_0]=X_2,\quad [P_2, X_1]=0,\quad [P_2, X_2]=2X_4,\\
[P_2, X_4]=0,\quad [X_l, X_m]=0\ (l, m=0, 1, 2, 4).
\end{gathered} \tag{22}$$

Подалгебра $\widetilde{P}_{8,10}$ задается базисными элементами

$$G+a_3X_3,\ L_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\,(a_3\neq 0) \tag{23}$$

и коммутационными соотношениями (22).

Подалгебра $\widetilde{P}_{8,11}$ задается базисными элементами

$$G,\ L_3+d_3X_3,\ P_1,\ P_2,\ X_0,\ X_1,\ X_2,\ X_4\ (d_3\neq 0) \tag{24}$$

и коммутационными соотношениями (22).

Подалгебры $\widetilde{P}_{8,9}$, $\widetilde{P}_{8,10}$ и $\widetilde{P}_{8,11}$ изоморфны расщепляющейся подалгебре $P_{8,2}$, найденной в работе [3].

Подалгебра $\widetilde{P}_{31,4}$ задается базисными элементами

$$\widetilde{B}_i\equiv L_i+\frac{\varepsilon}{2}(P_i+C_i),\quad \widetilde{A}\equiv L_3-\frac{\varepsilon}{2}(P_3+C_3)+\widetilde{u}_0X_0,\ X_1, X_2, X_3,\ X_4-X_0,$$

$$(\widetilde{u}_0\neq 0,\ i=1, 2, 3) \tag{25}$$

и коммутационными соотношениями

$$\begin{gathered}
[\widetilde{B}_i, \widetilde{B}_j]=2\varepsilon_{ijk}\widetilde{B}_k,\quad [\widetilde{B}_i, \widetilde{A}]=\frac{\varepsilon}{2}\widetilde{u}_0X_i,\quad [\widetilde{B}_1, X_1]=\varepsilon(X_4-X_0),\ [\widetilde{B}_1,\ X_2]=X_3,\\
[\widetilde{B}_1, X_3]=-X_2,\quad [\widetilde{B}_i, X_4-X_0]=-\varepsilon X_i,\quad [\widetilde{B}_2, X_1]=-X_3,\\
[\widetilde{B}_2, X_2]=\varepsilon(X_4-X_0),\quad [\widetilde{B}_2, X_3]=X_1,\quad [\widetilde{B}_3, X_1]=X_2,\\
[\widetilde{B}_3, X_2]=-X_1,\quad [\widetilde{B}_3, X_3]=\varepsilon(X_4-X_0),\quad [\widetilde{A}, X_1]=X_2,\quad [\widetilde{A}, X_2]=-X_1,\\
[\widetilde{A}, X_3]=-\varepsilon(X_4-X_0),\quad [\widetilde{A}, X_4-X_0]=\varepsilon X_3,\quad [X_k, X_l]=0,\\
[X_k, X_4-X_0]=0\quad (j, k, l=1, 2, 3).
\end{gathered} \tag{26}$$

1. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. I. General method and the Poincaré group.— J. Math. Phys., 1975, **16**, N 8, p. 1597—1614.
2. Фущич В. И. Представления полной неоднородной группы де Ситтера и уравнения в пятимерном подходе. — Теоретическая и математическая физика, 1970, **4**, № 3, с. 360— 382.
3. Федорчук В. М. Расщепляющиеся подалгебры алгебры Ли обобщенной группы Пуанкаре Р (1, 4). Укр. мат. журн., 1979, **31**, № 6, с. 717—722.
4. Patera J., Winternitz P., Zassenhaus H. Quantum numbers for particles in de Sitter space.— J. Math. Phys., 1976, **17**, N 5, p. 717—727.
5. Patera J., Sharp R. T., Winternitz P., Zassenhaus H. Continuous subgroups of the fundamental groups of physics. III. The de Sitter groups. —J. Math. Phys., 1977, **18**, N 12, p. 2259—2288.
6. Федорчук В. М. Непрерывные подгруппы неоднородной группы де Ситтера *P(1, 4)*. Препринт 78.18. —Киев: Институт математики АН УССР, 1978. —36 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию 17.01.1980 г.
после переработки — 25.07.1980 г.