УДК 519.21+517.43

Р. Н. Кадобянский

О решениях функциональных уравнений в абстрактных винеровских пространствах

1. Теория интегрирования в бесконечномерных линейных топологических пространствах и ее связи с функционально-аналитическими методами наиболее полно разработаны для гильбертовых пространств с гауссовыми мерами. Прообразами многих построений этой теории послужили факты, впервые установленные Камероном и Мартином для классического винеровского пространства [1].

2. Основные положения, касающиеся абстрактного винеровского пространства (АВП) известны (см., например, [3, 4]). Напомним лишь некоторые из них и введем необходимые обозначения.

Пусть (i, H, B) — АВП. Скалярное произведение и норму на H обозначим $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ соответственно, норму на B — $|\cdot|$, винеровскую меру на B с единичным параметром — p. Пространство, сопряженное к банахову пространству B, обозначим B^*. Опустим символы вложений i и i^*, отождествляя вложения с соответствующими пространствами, так что $B^* \subset \subset H \subset B$. Непрерывные линейные и линейные измеримые функционалы обозначим символом $\langle\cdot,\cdot\rangle$, записывая на втором месте элемент из B^* для линейного и элемент из H для линейного измеримого функционала. Банахово пространство линейных непрерывных операторов из банахова пространства X в банахово пространство Y обозначим $L(X, Y)$. Банахово пространство операторов Гильберта — Шмидта из H в H с нормой $\sigma_2(A) = = (\operatorname{tr} A^*A)^{1/2}$ обозначим $G(H)$. Для каждого $A \in G(H)$ его линейное измеримое продолжение на B обозначим $\widetilde{A}(\cdot)$. Область определения $\widetilde{A}$ — линейное многообразие полной меры и содержит H. Класс конечномерных ортогональных проекторов в H, частично упорядоченный по включению, обозначим $\mathcal{P}$ (для $P_1, P_2 \in \mathcal{P}$ отношение $P_1 < P_2$ означает, что $P_1(H) \subset \subset P_2(H)$).

3. Рассмотрим интегральное представление резольвенты произвольного оператора Гильберта — Шмидта в H.

Теорема 1. *Пусть $A \in G(H)$, и λ не является сингулярным числом оператора A. Тогда на H имеет место представление*

$$(I-\lambda A)^{-1}\cdot = \int_B x\rho(\lambda, A; \cdot)(x)\, p(dx), \tag{1}$$

где

$$\rho(\lambda, A; y)(x) = |\delta(I-\lambda A)| \exp\Big[\lambda Q(A; x) + \langle x-\lambda\widetilde{A}(x), y\rangle - \\ -\frac{\lambda^2}{2}\|\widetilde{A}(x)\|^2 - \frac{1}{2}\|y\|^2\Big] (y \in H) \bmod p\ (x \in B), \tag{2}$$

$$\delta(I-\lambda A) = \prod_n e^{\lambda\lambda_n}(1-\lambda\lambda_n) \tag{3}$$

— детерминант Карлемана — Фредгольма оператора $I-\lambda A$, а $Q(A;x)$ — измеримый квадратичный функционал, являющийся пределом почти везде сходящейся направленности

$$\langle x, P\widetilde{A}(x)\rangle - \operatorname{tr} PA, \tag{4}$$

где $\{P\}$ — некоторая направленность из $\mathcal{P}$.

Доказательство. Заметим, во-первых, что предположения относительно оператора A обеспечивают при каждом $y \in H$ абсолютную непрерывность относительно p меры $p \circ S_{-y}(I-\lambda\widetilde{A})$, соответствующей аффинному преобразованию

$$x \mapsto S_{-y}(I-\lambda\widetilde{A})(x) = x - \lambda\widetilde{A}(x) - y$$

и определяемой равенством

$$p_0 S_{-y}(I-\lambda\widetilde{A})(E) = p(S_{-y}(I-\lambda\widetilde{A})(E))$$

на каждом E из σ-алгебры борелевских множеств в B. При этом плотность задается равенством (2) [4].

Поскольку B сепарабельно, тождественное отображение B на B сильно измеримо. Из теоремы (см. [5]) следует, что $|\cdot|$ суммируема на B, и, следовательно, интеграл $\int_B xp(dx)$ существует и, как легко видеть, равен нулю.

Пусть $(I-\lambda A)^{-1}_{\sim} = I + \lambda(I-\lambda A)\widetilde{A}$. Рассмотрим интеграл

$$\int_B (I-\lambda A)^{-1}_{\sim} S_y(x)\, p(dx). \tag{5}$$

С одной стороны, в силу теоремы о замене переменных в интеграле Лебега, он равен

$$\int_B x\rho(\lambda, A; y)(x)\, p(dx), \tag{6}$$

а с другой —

$$(I-\lambda A)^{-1} y, \tag{7}$$

поскольку интеграл от $(I-\lambda A)^{-1}_{\sim}(x)$ равен нулю. Приравнивая выражения (6) и (7), получаем (1).

Замечание 1. Отметим вариант теоремы 1. Именно, заключение теоремы справедливо и в том случае, когда $A \in L(B, H)$, и λ не является сингулярным числом сужения $A|_H$ оператора A на H. В этом случае $\widetilde{A} = A$, и оператор $(I-\lambda A)^{-1}$ непрерывен на B. Поэтому равенство (1) может быть продолжено на B: если f — произвольный элемент из B и $\{f_n\}$ — последовательность из H, сильно сходящаяся в B к f, то

$$(I-\lambda A)^{-1} f = \lim_{n\to\infty} \int_B x\rho(\lambda, A; f_n)(x)\, p(dx). \tag{8}$$

Замечание 2. Несложно показать, что для $\delta(I-\lambda A)$ имеет место равенство

$$|\delta(I-\lambda A)|^{-1} = \int_B \exp\left[\lambda Q(A;x) - \frac{\lambda^2}{2}\|\widetilde{A}(x)\|^2\right] p(dx).$$

4. Рассмотрим вопрос об интегральном представлении оператора, обратного к заданному.

Теорема 2. *Пусть A — инъективный оператор в H, удовлетворяющий условию $A^*A \in G(H)$. Тогда на области значений $R(A)$ оператора A имеет место представление*

$$A^{-1}\cdot = \lim_{\lambda\to+\infty} \int_B x\rho(-\lambda, A^*A; A^*\cdot)(x)\, p(dx) \text{ (сходимость сильная в } H), \tag{9}$$

где

$$\rho(-\lambda, A^*A; A^*y)(x) = \delta(I + \lambda A^*A)\exp\Big[-\lambda Q(A^*A; x) - $$
$$- \langle x + \lambda A^*\widetilde{A}(x), A^*y\rangle - \frac{\lambda^2}{2}\| A^*\widetilde{A}(x)\|^2 - \frac{1}{2}\|A^*y\|^2\Big] (\mathrm{mod}\, p). \tag{10}$$

Доказательство. Пусть $y \in R(A)$. Уравнение

$$Ax = y \tag{11}$$

имеет единственное решение $x = A^{-1}y$ и в силу инъективности A равносильно уравнению

$$A^*Ax = A^*y. \tag{12}$$

Используя теорему Гильберта — Шмидта, нетрудно показать, что λz_λ, где z_λ — решение уравнения

$$z_\lambda + \lambda A^*Az_\lambda = A^*y \tag{13}$$

сильно сходится к x при $\lambda \to +\infty$. Поскольку для оператора A^*A и $\lambda > 0$ выполнены все условия теоремы I, то $(I + \lambda A^* A)^{-1}$ имеет представление вида (1), (2). В силу произвольности $y \in R(A)$, получаем (9).

5. Приведем некоторые определения [6, 4].

Пусть U — открытое непустое подмножество в B. Отображение $f: U \to F$ подмножества U в некоторое банахово пространство F называется H — непрерывным в точке $x \in U$, если функция $g(h) = f(x + h)$, определенная на $(U - x) \cap H$ непрерывна в нуле в индуцированной из H топологии. Отображение называется H — дифференцируемым в точке $x \in U$, если $g(h)$ дифференцируема по Фреше в нуле в H. f называется отображением класса $H - C^1$ на U, если она непрерывна и H — дифференцируема на U, и ее H — производная $f': U \to L(H, F)$ непрерывна.

Рассмотрим отображение

$$T = I + \lambda : U \to B, \tag{14}$$

и пусть T удовлетворяет следующим условиям:
I T — гомеоморфизм U на некоторое открытое подмножество Ω в B;
II $\lambda(U) \subset H$, и отображение $\lambda: U \to \mathrm{H}$ непрерывно;

III λ— отображение класса $H - C^1$; при каждом $x \in U$ $\lambda'(x)$ является оператором Гильберта — Шмидта, и оператор $I|_{\mathrm{H}} + \lambda'(x)$ обратим в H.

Заметим, что в АВП мера всякого непустого открытого множества строго положительна. Как показано в [4], при выполнении условий I — III мера $p0T \ll p$, и

$$\rho(T)(x) = \frac{dp_0T}{dp}(x) = |\delta(I + \lambda'(x))| \exp\Big[-\beta(\Lambda)(x) - $$
$$- \frac{1}{2}\|\Lambda(x)\|^2\Big] \bmod p\,(x \in U), \tag{15}$$

где $\beta(\Lambda)(x) = \lim\limits_{P \to I} [\langle x, P\Lambda(x)\rangle - \mathrm{tr}\, P\Lambda'(x)] \bmod p\,(x \in U)$ для некоторой направленности $\{P\} \in P$.

Обозначим $\alpha_0^U = \sup\{\alpha: \int\limits_U \exp \alpha |x| p(dx) < \infty\}$. В силу той же теоремы (см. [5]) $\alpha_0^U > 0$ существует. Произвольный ортобазис в $L^2(\Omega, \mathbf{R}, p)$ обозначим $\{\Psi_\sigma, \sigma \in I\}$.

Теорема 3. *Пусть отображение T удовлетворяет условиям* I—III, *и, кроме того,*

$$|T(x)| \geqslant \alpha^{-1} \ln \frac{|x|^2}{C} \text{ на } U \tag{16}$$

при некоторых $0<\alpha<\alpha_0^U$ и $C>0$. *Тогда при каждом* $h\in H$ *имеет место равенство на* Ω (*в смысле сходимости в* $L^2(U, \mathbf{R}, p)$):

$$\langle T^{-1}(\cdot), h\rangle = \sum_{\sigma\in I}\Psi_\sigma(\cdot)\int_U \langle x, h\rangle \Psi_\sigma(T(x))\,\rho(T)(x)\,p(dx). \tag{17}$$

Доказательство. Из условия (16) следует, что

$$|T^{-1}(y)|^2\leqslant C\exp\alpha|y| \text{ на } \Omega, \tag{18}$$

и, следовательно, при любом $h\in H$ $\langle T^{-1}(\cdot), h\rangle\in L^2(\Omega, \mathbf{R}, p)$. Поэтому имеет место разложение

$$\langle T^{-1}(\cdot), h\rangle = \sum_{\sigma\in I} C_\sigma^h\Psi_\sigma(\cdot), \tag{19}$$

где

$$C_\sigma^h = \int_\Omega \langle T^{-1}(x), h\rangle \Psi_\sigma(x)\,p(dx) = \int_U \langle x, h\rangle \Psi_\sigma(T(x))\,\rho(T)(x)\,p(dx). \tag{20}$$

Подставляя (20) в (19), приходим к (17).

Представляют интерес случаи, когда ортобазис $\{\Psi_\sigma\}$ можно построить в явном виде. Пусть $L_\pi^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}, d\tau)$ — пространство заданных на действительной оси вещественнозначных квадратично интегрируемых по мере Лебега с весом $\pi(\tau)=(2\pi)^{-1/2}\exp(-\tau^2/2)$ функций, и $\{\varphi_n\}$ — ортобазис в $L_\pi^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}, d\tau)$. Пусть, далее, $\{e_n\}$ — ортобазис в H из векторов $e_n\in B^*$. Используя разложение меры p [6] и тот факт, что множество цилиндрических функций (функций вида $f(x)=f(\langle x, e_{i_1}\rangle, \ldots, \langle x, e_{i_n}\rangle)$) плотно в $L^2(B, \mathbf{R}, p)$, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Пространство* $L^2(B, \mathbf{R}, p)$ *сепарабельно, и система функций*

$$\Psi_{i_1,\ldots,i_n}(x)=\prod_{k=1}^n \varphi_{i_k}(\langle x, e_k\rangle)\ (i_k=\overline{1,\infty};\ k=\overline{1,n};\ n=\overline{1,\infty}) \tag{21}$$

образует ортобазис в $L^2(B, \mathbf{R}, p)$.

Замечание 3. Если $\{\varphi_n\}$ — полиномы Эрмита, то $\{\Psi_{i_1,\ldots,i_n}\}$ представляют собой так называемые полиномы Фурье—Эрмита, впервые построенные в классическом винеровском пространстве в [7] и использованные в работе [2].

Из теоремы 3 вытекает следствие.

Следствие 1. *Пусть отображение T удовлетворяет всем условиям теоремы 2 с заменой в формулировках U и Ω на B. Тогда при каждом $h\in H$ на B имеет место равенство* (*в смысле среднеквадратичной сходимости по мере* p)

$$\langle T^{-1}(\cdot), h\rangle = \lim_{n\to\infty}\sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{\infty}\Psi_{i_1,\ldots,i_n}(\cdot)\times$$
$$\times\int_B \langle x, h\rangle \Psi_{i_1,\ldots,i_n}(T(x))\,\rho(T)(x)\,p(dx). \tag{22}$$

6. Укажем еще один класс задач, для которых легко получить интегральные представления решений.

Пусть $Q=[0, 1]$ и $C(Q, E)$ — линейное пространство непрерывных отображений Q в некоторое банахово пространство E. Введение нормы $|x| = \sup_{t\in Q}\|x(t)\|_E$ превращает $C(Q, E)$ в банахово пространство, которое мы обозначим $\mathfrak{B}$. Если на $\mathfrak{B}$ задана борелева гауссовская мера μ с нулевым средним, обладающая тем свойством, что для всякого непустого открытого множества U $p(U)>0$, то $\mathfrak{B}$ единственным образом может рассматриваться как некоторое АВП $(i, \mathfrak{H}, \mathfrak{B})$ с винеровской мерой $\mathfrak{P}=\mu$ (теорема Сато—Кьюлбса, см. [3]). Если E—АВП, то естественно рассматривать множество отображений $C_0(Q, E)$, таких, что $x(0)=0$, и на $C_0(Q, E)$ определить меру, являющуюся распределением E-значного винеровского процесса, выходящего из нуля, с независимыми приращениями $x(t)-x(s)$ $(t>s)$, имеющими распределение p_{t-s} (p_t — винеровская мера на E с параметром t).

В пространстве $(i, \mathfrak{H}, \mathfrak{B})$ рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения $u^{(n)}(t)+\sum_{k=1}^{n}(A_k u^{(n-k)})(t)=f(t)$, $u^{(k)}(0)=0$ $(k=\overline{0, n-1})$, и пусть A_k $(k=\overline{0, n-1})$ — линейные непрерывные операторы в B, $f\in B$. Определим оператор $D{:}B\to B$ равенством $(Df)(t)=\int_0^t f(s)\,ds$. Тогда $(D^k f)(t)=$ $=[(k-1)!]^{-1}\int_0^t (t-s)^{k-1}f(s)\,ds$ $(k\geqslant 1)$. Очевидно, D^k $(1\leqslant k\leqslant n)$ линейны и непрерывны в B, причем $|D^k|\leqslant(k!)^{-1}$. Для функции $z(t)=u^{(n)}(t)$ приведенная задача равносильна уравнению $z(t)+(Kz)(t)=f(t)$, где K—линейный ограниченный оператор в B, определяемый равенством $(Kz)(t)=\sum_{k=1}^{n}(A_k D^k z)(t)$. При этом $u(t)=(D^n z)(t)$. Применяя теорему 1, легко получить условия для A_k $(k=1,n)$ и t, обеспечивающие представление решения приведенного уравнения в виде (1). В классическом винеровском пространстве интегральное представление решений рассматривалось в [8].

Замечание 4. Легко видеть, что приведенные в заметке представления не обусловлены гауссовостью меры p. При получении представлений вида (1) используется только конечность меры и равенство нулю ее среднего значения. Схема доказательства представлений вида (17) не использует вообще никаких ограничений на меру. Отсюда следует, что соотношения типа (1) могут иметь место в любом измеримом линейном топологическом пространстве над R (σ-алгебра порождается топологией), в котором сопряженное разделяет точки (интегралы понимаются в слабом смысле) и на котором задана вероятностная мера с нулевым средним, а соотношения типа (17) — в таком же пространстве без указанных ограничений на меру. Однако в столь общей постановке остается открытым вопрос согласованности предположений относительно преобразований, а также неизвестны выражения для производных Радона — Никодима.

1. Ostrom T. G. The solution of linear integral equations by means of Wiener integrals. — Bull. Amer. Math. Soc., 1949, 55, N 4, p. 343—354.
2. Cameron R. H., Martin W. T. Nonlinear integral equations.— Ann. Math., 1950, 51, N 3, p. 275—285.
3. Го X.—С. Гауссовские меры в банаховых пространствах. «Мир», М., 1979, 172 стр.
4. Ramer R. On nonlinear transformations of Gaussian measures. — Journ. Func. Anal., 1974, 15, N 2, p. 166—187.
5. Скороход А. В. Замечание о гауссовских мерах в банаховом пространстве.— Теор. вероятн. и ее примен., 1970, 15, с. 519—520.
6. Gross L. Potential theory on Hilbert space.— Journ. Func. Anal., 1967, 1, p. 123—181.
7. Cameron R. H., Martin W. T. The orthogonal. development of nonlinear functionals in series of Fourier — Hermite functionals.— Ann. Math., 1947, 48, N 2, p. 385—392.
8. Козак П. П. Про зображення розв'язку лінійного диференціального рівняння у вигляді континуального інтеграла.— ДАН УРСР, 1971, с. 780—783.

Львовский
политехнический институт

Поступила в редакцию 9.06.1980 г.;
после переработки — 15.01.1981 г.