УДК 519.46

З. И. Москаленко

О существовании неизоморфных локально компактных топологизаций абелевой группы с совпадающими множествами замкнутых подгрупп

В [1] поставлен следующий вопрос, сформулированный К. Россом: может ли группа G иметь неизоморфные локально компактные топологизации G_{T_1} и G_{T_2} с совпадающими множествами замкнутых подгрупп? Р. Риккерт получил положительное решение этого вопроса для некоторых частных случаев, а решение вопроса в целом свел к случаю, когда связные компоненты групп G_{T_1} и G_{T_2} абелевы [2]. В [3] автором построен пример нильпотентной группы G, имеющий неизоморфные локально компактные топологизации G_{T_1} и G_{T_2} с совпадающими множествами замкнутых подгрупп, причем G_{T_1} и G_{T_2} — группы Ли и в каждой из них связная компонента абелева. Таким образом, вопрос, поставленный в [1], решен отрицательно. Но для случая абелевой группы вопрос оставался открытым.

В настоящей работе получено отрицательное решение данного вопроса для абелевой группы G.

Лемма 1. *Пусть F — дискретная абелева группа, равная прямой сумме конечных циклических групп P_i простых порядков $p_i > 3$, где i пробегает множество всех натуральных чисел, а p_i — последовательность всех простых чисел, больших трех, расположенных в возрастающем порядке, H — дискретная группа с системой образующих, состоящей из всех элементов группы F и элементов $z, z_1, \ldots, z_n, \ldots$ и с системой определяющих соотношений, состоящей из соотношений коммутативности, определяющих соотношений группы F и соотношений $p_i z_i = z + a_i$, где a_i — образующий элемент группы P_i, $A(H)$ — группа автоморфизмов группы H.*

Справедливы следующие утверждения:1. F является периодической частью группы H. 2. F не является прямым слагаемым в H. 3. Группа автоморфизмов группы H/F состоит из тождественного автоморфизма и инверсии. 4. Для всякого автоморфизма $b \in A(H)$, индуцирующего на H/F тождественный автоморфизм, существует такое натуральное число $N(b)$, что при $n > N(b)$ b индуцирует на подгруппах P_n тождественные автоморфизмы.

Доказательство. Утверждения 1 и 2 доказаны в [4, с. 173].

Фактор-группа H/F — дискретная группа без кручения ранга 1. В H/F уравнение $p^r S = \alpha n\tilde{z}$, где $\alpha = \pm 1$, n — натуральное число, $\tilde{z}$ — образ в H/F элемента $z \in H$, имеет решение тогда и только тогда, когда p^{r-1} делит n. Поэтому при произвольном автоморфизме φ группы H/F $\varphi(n_1\tilde{z}) = n_2\tilde{z}$ тогда и только тогда, когда $n_2 = \alpha n_1$. Отсюда следует, что единственным автоморфизмом группы H/F является отображение $\tilde{\varphi}_0$: $\tilde{x} \to -\tilde{x}$, откуда следует справедливость утверждения 3.

Рассмотрим теперь группу автоморфизмов $A(H)$ группы H. Очевидно, множество $B(H)$ всех автоморфизмов из $A(H)$, индуцирующих на H/F тождественный автоморфизм, образует подгруппу в $A(H)$. $A(H)$ — прямая сумма подгруппы $B(H)$ и подгруппы $T(H)$ порядка 2, порожденной автоморфизмом φ_0: $x \to -x$.

Пусть $b \in B(H)$. Тогда $b(z) = z + \sum_{j=1}^{n} k_j a_j$, где $0 \leqslant k_j \leqslant p_j - 1$, n—натуральное число, $b(z_i) = z_i + l_i$, где $l_i \in F$. $b(p_i z_i) = p_i z_i + p_i l_i = z + a_i + p_i l_i$, $b(z + a_i) = z + \sum_{j=1}^{n} k_j a_j + b(a_i)$.

Учитывая, что $b(p_i z_i) = b(z + a_i)$, получаем: $a_i + p_i l_i = \sum_{j=1}^{n} k_j a_j + b(a_i)$; $p_i l_i = \sum_{j=1}^{m} k'_j a_j$, где $m \geqslant i$, $k'_i = 0$.

Рассмотрим проекции элементов $a_i + \sum_{j=1}^{m} k'_j a'_j$ и $\sum_{j=1}^{n} k_j a_j + b(a_i)$ на подгруппу P_i. Проекция элемента $a_i + \sum_{j=1}^{m} k'_j a_j$ на P_i равна $a_i + k'_i a_i$; проекция элемента $\sum_{j=1}^{n} k_j a_j + b(a_i)$ на P_i равна $k_i a_i + b(a_i)$ в случае, когда $i \leqslant n$ и равна $b(a_i)$ при $i > n$. Отсюда следует, что при $i > n$ $a_i = b(a_i)$. Число n определяется автоморфизмом b. Итак, для всякого автоморфизма b из $B(H)$ существует такое натуральное число $N(b)$, что при $n > N(b)$ b индуцирует на подгруппах P_n тождественные автоморфизмы.

Лемма 2. *Пусть H — группа, описанная в лемме* 1, $H^л$ — группа характеров группы H, $(H^л)_0$ — связная компонента группы $H^л$.

Всякий автоморфизм группы $H^л$ индуцирует на почти всех примарных компонентах фактор-группы $H^л/(H^л)_0$ тождественный автоморфизм либо инверсию.

Доказательство леммы следует из утверждений 3, 4 леммы 1 и из двойственности.

Лемма 3. *Существует абстрактная абелева группа G, имеющая следующую структуру: G содержит подгруппы M, $H^л$, V, где $G \supset M \supset H^л \supset V$. Системой образующих группы G служит множество всех элементов группы M и счетное множество элементов $v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots$, а определяющими соотношениями являются соотношения коммутативности, все определяющие соотношения группы M и соотношения $p_i v_i = v_0 + c_i$. M—группа, системой образующих которой является множество всех элементов группы $H^л$ и элементы c_i $(i = 1, 2, \ldots)$, где $H^л$ — абстрактная группа, изоморфная группе характеров группы H, описанной в лемме 2, а система определяющих соотношений группы M состоит из определяющих соотношений группы $H^л$, соотношений коммутативности и соотношений $p_i c_i = q_i$, (1) где q_i — образующий элемент примарной p_i-компоненты группы V; V* — подгруппа группы $H^л$, *определяемая из абстрактного прямого разложения $H^л = (H^л)_0 + V$.*

Доказательство. Всякое следствие из соотношений (1) может быть записано в виде $\sum_{i=1}^{n} k_i (p_i c_i - q_i) = 0$, где $n \geqslant 1$, k_i — целые числа,

$k_n \neq 0$. Очевидно, из этих соотношений не может следовать равенство нулю элемента из $H^л$, отличного от нуля, следовательно, $H^л$ — подгруппа группы M. В абстрактном смысле $M = (H^л)_0 + M_1$, где $M_1 \supset V$.

Аналогичными рассуждениями убеждаемся, что M-подгруппа группы G. $G = (H^л)_0 + G_1$ — абстрактная прямая сумма, где $G_1 \supset M_1$.

Лемма 4. *Существуют топологии T_1 и T_2, которые превращают G в локально компактные группы G_{T_1} и G_{T_2}.*

Доказательство. Топологию T_1 на G вводим заданием системы окрестностей единицы, совпадающей с системой окрестностей единицы группы $H^л$. Группа G_{T_1} локально компактна, $H^л_{T_1}$ — открытая подгруппа в G_{T_1}. M_{T_1} — периодическая часть G_{T_1}; G_{T_1}/M_{T_1} — дискретная группа без кручения; $G_{T_1}/H^л_{T_1} \cong H$.

Рассмотрим в $H^л$ замкнутую подгруппу W, равную аннулятору подгруппы $\{F, z\}$ группы H. $W^л \cong H/\{F, z\}$, $W \subset (H^л)_0$. Группа W изоморфна топологической прямой сумме групп P_i $(i = 1, 2, \ldots)$. Пусть $\widetilde{W}$ — пополнение W в $(H^л)_0$. $(H^л)_0/W \cong K$; $\widetilde{W}/W$ — абстрактная прямая сумма групп P_i^∞ по всем p_i, где P_i^∞ — квазициклическая p_i-группа, $i = 1, 2, \ldots, K$ — группа вращения окружности.

$(H^л)_0 = \widetilde{W} + P_2^\infty + P_3^\infty + \tilde{\widetilde{W}}$ — абстрактная прямая сумма, где $\tilde{\widetilde{W}}$ — полная группа без кручения. $M = (H^л)_0 + M_1$.

Зададим автоморфизм в абстрактном смысле σ на M, где

$$\sigma(x) = \begin{cases} 2x \text{ при } x \in \widetilde{W} + M_1, \\ \\ x \text{ при } x \in P_2^\infty + P_3^\infty + \tilde{\widetilde{W}}. \end{cases}$$

Произвольный элемент $x \in M$ представим в виде $x = x_1 + x_2$, где $x_1 \in \widetilde{W} + M_1$, $x_2 \in P_2^\infty + P_3^\infty + \tilde{\widetilde{W}}$. Полагаем $\sigma(x) = \sigma(x_1) + \sigma(x_2)$. Очевидно, $\sigma(H^л)_0 = (H^л)_0$.

Задаем топологию T_2 на $H^л$ заданием системы открытых множеств $\widetilde{\Gamma} = \sigma(\Gamma)$, где Γ пробегает все открытые множества из $H^л_{T_1}$. Очевидно, $H^л_{T_2}$ — компактная топологическая группа. Топологию T_2 продолжаем на G, исходя из базы окрестностей единицы группы $H^л_{T_2}$. σ — топологический изоморфизм групп $H^л_{T_2}$ и $H^л_{T_1}$. Группа G_{T_2} локально компактна.

Лемма 5. *Множества замкнутых подгрупп групп G_{T_1} и G_{T_2} совпадают.*

Доказательство. Пусть X — замкнутая подгруппа в G_{T_1}. Тогда $X \cap H^л$ — замкнутая подгруппа в G_{T_1}. Если $X \cap H^л \supset (H^л)_0$, то $X \cap H^л/(H^л)_0$ — замкнутая подгруппа в $V + (H^л)_0/(H^л)_0$ и $X \cap H^л = (H^л)_0 + U$, где U — подгруппа группы V. Тогда $X \cap H^л = \sigma(X \cap H^л)$ — замкнутая подгруппа в H_{T_2}, а следовательно, и в G_{T_2}.

Если $X \cap H^л \not\supset (H^л)_0$, то $X \cap H^л$ — вполне несвязная группа, равная прямой сумме своих примарных компонент. Примарные компоненты группы $X \cap H^л$ замкнуты в $H^л$, они конечны вследствие конечности замкнутых примарных подгрупп групп W, $(H^л)_0/W$, $H^л/(H^л)_0$. $X \cap H^л = P_{x_2} \oplus P_{x_3} \oplus P_x$, где $P_{x_2} \in P_2^\infty$; $P_{x_3} \subset P_3^\infty$; $P_x \subset \widetilde{W} + M_1$.

Вследствие определения автоморфизма σ $X \cap H^л = \sigma(X \cap H^л)$, и $X \cap H^л$ — замкнутая подгруппа в G_{T_2}. $X/X \cap H^л \cap H/X \cap H^л = 1$, следовательно, $X/X \cap H^л$ — дискретная подгруппа в $G_{T_2}/X_{T_2} \cap H^л_{T_2}$, значит X — замкнутая подгруппа в G_{T_2}.

Аналогично можно доказать, что из замкнутости X в G_{T_2} следует замкнутость этой подгруппы в G_{T_1}. Отсюда следует, что множества замкнутых подгрупп в G_{T_1} и в G_{T_2} совпадают.

Теорема. *Группа G имеет неизоморфные локально компактные топологизации с совпадающими множествами замкнутых подгрупп.*

Доказательство. Допустим, что существует топологический изоморфизм δ групп G_{T_1} и G_{T_2}. Тогда $\delta((H^л)_{0T_1}) = (H^л)_{0T_2}$. Рассматривая фактор-группы $G_{T_1}/(H^л)_{0T_1}$ и $G_{T_2}/(H^л)_{0T_2}$ и их характеристические подгруппы, порожденные элементами простых порядков, получаем: $\delta(H^л_{T_1}) = H^л_{T_2}$.

Затем, рассматривая периодические части групп G_{T_1} и G_{T_2}, получаем: $\delta = (M_{T_1}) = M_{T_2}$.

$G_{T_1}/M_{T_1} \cong G_{T_2}/M_{T_2} \cong H/F$, следовательно, отображение δ задает автоморфизм на дискретной группе G/M.

Как показано, группа автоморфизмов группы G_{T_1}/M_{T_1} имеет порядок 2 и состоит из тождественного автоморфизма и автоморфизма φ: $x \to -x$.

Следовательно, $\delta(v_0) = \alpha v_0 + w$, где $\alpha = \pm 1$, $w \in M$.

На дискретной группе $G/H^л$ δ задает автоморфизм. $G/H^л \cong H$, и, как показано выше, существует такое натуральное число N, что при $n > N$ $\delta(c_n) = \alpha c_n + h_n$, где $\alpha = \pm 1$, $h_n \in H^л$.

c_n — p_n-элемент, следовательно, h_n — p_n-элемент, и $h_n = \zeta_n + \xi_n$, где $\zeta_n \in (H^л)_0$. ξ_n — элемент порядка p_n из V.

$$\delta(q_n) = \delta(p_n c_n) = p_n \delta(c_n) = \alpha p_n c_n + p_n h_n = \alpha q_n + p_n \zeta_n.$$

Итак, δ индуцирует на $H^л$ топологический изоморфизм $H^л_{T_1} \to H^л_{T_2}$, при котором для всех $n > N$ $\delta(q_n) = \alpha q_n + \zeta'_n$, где $\alpha = \pm 1$, $\zeta'_n \in (H^л)_0$.

σ — топологический изоморфизм, отображающий $H^л_{T_1}$ в $H^л_{T_2}$, при котором $\sigma(q_n) = 2q_n$ для всех натуральных n. Отсюда следует, что $\delta^{-1}\sigma$ — топологический изоморфизм группы $H^л_{T_1}$, при котором $\delta^{-1}\sigma(q_n) = \delta^{-1}(2q_n) = 2\alpha q_n + \theta_n$ при $n > N$, где $\theta_n \in (H^л)_0$.

Но, как показано выше, такого автоморфизма не существует. Получено противоречие, из которого следует, что группы G_{T_1} и G_{T_2} топологически неизоморфны.

Итак, группа G имеет неизоморфные локально компактные топологизации G_{T_1} и G_{T_2} с совпадающими множествами замкнутых подгрупп.

1. Коуровская тетрадь. Новосибирск, Изд-во АН СССР, 1973, с. 48
2. Rickert N. W. Locally compact topologies for groups. Trans. Amer. Math. Soc., 1967, **126**, 2, p. 225.
3. Москаленко З. И. К вопросу о локально компактной топологизации группы. Укр. мат. журн., 1978, **30**, № 2, с. 257—260.
4. Курош А. Г. Теория групп. М.: Наука, 1967.— 648 с.

Научно-исследовательский
и конструкторско технологический институт
городского хозяйства МЖКХ УССР

Поступила в редакцию 31.01.1980 г.
после переработки 10.07.1980 г.