УДК 517.978.53

*С. Атдаев*

# Об однозначной разрешимости одного класса уравнений с вольтерровым оператором

Пусть $E$ — некоторое банахово пространство, $E_T$ $(T = (T^1, \dots, T^p))$ — пространство непрерывных абстрактных функций $x(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T$; $t = (t^1, \dots, t^p))$ со значениями из $E$ и с нормой $\| x \|_{E_T} = \max\limits_{0 \leqslant t \leqslant T} \| x(t) \|_E$. Пусть $F(t, x, y_t)$ — нелинейный оператор Вольтерра [1, 2] при фиксированном $x$ (т. е. при каждом фиксированном $t \in [0, T]$) он действует из $E_t$ в $E$, а при фиксированном $t$ и $y_t$ — обычный нелинейный оператор (т. е. оператор, действующий в $E$).

В работе устанавливается нелокальная теорема существования и единственности для уравнения

$$x(t) = F[t, x(t), x_t] \tag{1}$$

в пространстве $E_T$. Локальные теоремы для уравнения (1) доказаны в работах [3, 4].

Теорема 1. *Пусть оператор* $F(t, x, y_t) : [0, T] \times E \times E_T \to E$ *непрерывен и удовлетворяет условию*

$$\| F(t, \bar{x}, \bar{y}_t) - F(t, x, y_t) \|_E \leqslant L \| \bar{x} - x \|_E + \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i) \times$$

$$\| \bar{y}(s) - y(s) \|_E \, ds^1 \ldots ds^p, \tag{2}$$

*где* $0 \leqslant L < 1$—*постоянная,* $K_i(s^i)$ $(0 \leqslant s^i \leqslant T^i; \quad i = \overline{1, p})$ — *суммируемые соответственно на отрезках* $[0, T^i]$ *функции.*

*Тогда уравнение* (1) *имеет единственное непрерывное решение, определенное на всем отрезке* $[0, T]$.

Доказательство. В пространстве $E_T$ введем норму по формуле

$$\| x \|^*_{E_T} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \left\{ \| x(t) \|_E \exp \left( - L_1 \sum_{i=1}^{p} \int_0^{t^i} K_i(s^i) \, ds^i \right) \right\},$$

где $L_1 > 0$ — постоянная. Пусть $Ax(t) \equiv F[t, x(t), x_t]$. Очевидно, что оператор $A$ действует в пространстве $E_T$. Учитывая условие (2), имеем

$$\| Ax - Ay \|^*_{E_T} = \| F(t, x, x_t) - F(t, y, y_t) \|^*_{E_T} = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \Bigg\{ \| F[t, x(t), x_t] -$$

$$- F[t, y(t), y_t] \|_E \exp \left( - L_1 \sum_{i=1}^{p} \int_0^{t^i} K_i(s^i) \, ds^i \right) \Bigg\} \leqslant \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \Bigg\{ \Bigg[ L \| x(t) - y(t) \|_E +$$

$$+ \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i) \| x(s) - y(s) \|_E \, ds^1 \ldots ds^p \Bigg] \exp \left( - L_1 \sum_{i=1}^{p} \int_0^{t^i} K_i(s^i) \, ds^i \right) \Bigg\} \leqslant$$

$$\leqslant L \| x - y \|^*_{E_T} + \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \Bigg\{ \exp \left( - L_1 \sum_{i=1}^{p} \int_0^{t^i} K_i(s^i) \, ds^i \right) \int_0^{t^1} \cdots \int_0^{t^p} \sum_{i=1}^{p} K_i(s^i) \times$$

$$\times \exp \left( L_1 \sum_{i=1}^{p} \int_0^{s^i} K_i(\tau^i) \, d\tau^i \right) \cdot \exp \left( - L_1 \sum_{i=1}^{p} \int_0^{s^i} K_i(\tau^i) \, d\tau^i \right) \| x(s) -$$

$$- y(s) \|_E \, ds^1 \ldots ds^p \Bigg\} \leqslant L \| x - y \|^*_{E_T} + \frac{1}{L_1^p} \prod_{i=1}^{p} \left[ 1 - \exp \left( - L_1 \int_0^{T^i} K_i(s^i) \, ds^i \right) \right] \times$$

$$\| x - y \|^*_{E_T} = \left\{ L + \frac{1}{L_1^p} \prod_{i=1}^{p} \left[ 1 - \exp \left( - L_1 \int_0^{T^i} K_i(s^i) \, ds^i \right) \right] \right\} \| x - y \|^*_{E_T},$$

т. е. $\| Ax - Ay \|^*_{E_T} \leqslant q \| x - y \|^*_{E_T}$, где

$$q = L + \frac{1}{L_1^p} \prod_{i=1}^{p} \left[ 1 - \exp \left( - L_1 \int_0^{T^i} K_i(s^i) \, ds^i \right) \right].$$

Для выполнимости неравенства $q < 1$ достаточно взять $L_1 = \left(\frac{1}{1-L}\right)^{1/p}$. Следовательно, утверждение теоремы 1 вытекает из принципа сжимающих отображений [5]. Теорема доказана.

Замечание. При условиях доказанной теоремы единственное непрерывное решение уравнения (1) является пределом приближений Пикара

$$x^{(n)}(t) = F[t, x^{(n-1)}(t), x_t^{(n-1)}] \quad (n = 1, 2, \ldots), \tag{3}$$

где в качестве $x^{(0)}(t)$ можно взять любую функцию из $E_T$. Легко доказывается, что при этих же условиях к решению уравнения (1) сходятся также приближения

$$y^{(n)}(t) = F[t, y^{(n)}(t), y_t^{(n-1)}] \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4}$$

Скорость сходимости $x^{(n)}(t)$ и $y^{(n)}(t)$ к решению $x(t)$ уравнения (1) определяется соответственно неравенствами

$$\| x^{(n)}(t) - x(t) \|_E \leqslant \Bigg[ L^n + \sum_{m=1}^{n} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{(m!)^{p+1}} \times$$

$$\times L^{n-m} \prod_{i=1}^{p} \left( \int_0^{T^i} K_i(s^i)\, ds^i \right)^m \Bigg] \| x - x^{(0)} \|_{E_T},$$

$$\| y^{(n)}(t) - x(t) \|_E \leqslant \frac{\| x - x^{(0)} \|_{E_T}}{(1-L)^n} \cdot \frac{\prod_{i=1}^{p} \left( \int_0^{T^i} K_i(s^i)\, ds^i \right)^n}{(n!)^p}.$$

Из этих оценок следует, что при условиях теоремы 1 приближения (4) сходятся к решению уравнения (1) быстрее, чем приближения (3).

Рассмотрим некоторые применения доказанной теоремы.

Пусть $E = R^m$. Тогда примером уравнения (1) может служить уравнение

$$x(t) = \Phi \left\{ t, x(t), \int_0^{t^1} \ldots \int_0^{t^p} K[t, s, x(s)]\, ds^1 \ldots ds^p \right\}, \tag{5}$$

где $x, \Phi, K \in R^m$, $t = (t^1, \ldots, t^p)$. Пусть вектор-функции $\Phi(t, x, y)$ $(0 \leqslant t \leqslant T;\ x, y \in R^m)$ и $K(t, s, x)$ $(0 \leqslant t,\ s \leqslant T;\ x \in R^m)$ непрерывны по совокупности переменных и удовлетворяют соответственно условиям

$$|\Phi(t, \bar{x}, \bar{y}) - \Phi(t, x, y)| \leqslant L_1 |\bar{x} - x| + L_2 |\bar{y} - y|,\ |K(t, s, \bar{x}) -$$

$$- K(t, s, x)| \leqslant \prod_{i=1}^{p} K_i(s^i) |\bar{x} - x|,$$

где $L_1$, $L_2$ — положительные постоянные, причем $L_1 < 1$, $K_i(s^i)$ $(0 \leqslant s^i \leqslant T^i;\ i = \overline{1, p})$ — суммируемые соответственно на $[0, T^i]$ функции (здесь через $|x|$ обозначается норма вектора $x \in R^m$).

Тогда очевидно, что оператор

$$F(t, x, y_t) \equiv \Phi \left\{ t, x, \int_0^{t^1} \ldots \int_0^{t^p} K[t, s, y(s)]\, ds^1 \ldots ds^p \right\}$$

удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Следовательно, уравнение (5) имеет единственное непрерывное решение, определенное при всех $t \in [0, T]$.

Пусть теперь $E = C[a, b]$ — пространство непрерывных $m$-мерных вектор-функций $u(s)$, $s = (s^1, \ldots, s^p)$ $(a \leqslant s \leqslant b;\ a = (a^1, \ldots, a^p),\ b = (b^1, \ldots$

$\ldots, b^p)$) с нормой $\|u\| = \max\limits_{a \leqslant s \leqslant b} |u(s)|$. В качестве примера можно взять уравнение

$$x(t, s) = \Phi_1 \Big\{ t, s, \int\limits_{a^1}^{b^1} \cdots \int\limits_{a^p}^{b^p} K_1[t, s, \sigma, x(t, \sigma)]\, d\sigma^1 \ldots d\sigma^p,$$

$$\int\limits_0^{t^1} \cdots \int\limits_0^{t^p} K_2[t, s, \tau, x(\tau, s)]\, d\tau^1 \ldots d\tau^p \Big\},$$

где $x, \Phi_1, K_1, K_2 \in R^m$, $t = (t^1, \ldots, t^p)$, и аналогичным образом сформулировать достаточные условия справедливости утверждения теоремы 1 и для этого уравнения.


1. Тихонов А. Н. О функциональных уравнениях типа Volterra и их применениях к задачам математической физики.— Бюл. Моск. ун-та. Секция А, 1938, 8, *1—25*.
2. Мамедов Я. Д., Аширов С. А. Нелинейные уравнения Вольтерра. Ашхабад: Ылым, 1977. *176*.
3. Атдаев С., Аширов С. Исследование решений нелинейных многомерных операторных уравнений Вольтерра.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, 5, *573—579*.
4. Атдаев С. К теории решений нелинейных многомерных операторных уравнений Вольтерра.— Изв. АН ТуркмССР. Сер. физ.-техн., хим. и геол. наук, 1976, *6*,*9—16*.
5. Приближенное решение операторных уравнений/Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П. и др. М.: Наука, 1969, *456*.



Туркменский
государственный университет



Поступила в редакцию
14.07.1980 г