УДК 519.44

*В. Т. Нагребецкий*

# О группе автоморфизмов конечной группы $K(p^m, n)$

Пусть существует конечная группа наибольшего порядка периода $p^m$ где $p$ — простое число, $m \geqslant 1$, и с точно $n$ порождающими элементами. Обозначим ее через $K(p^m, n)$. Существование таких групп для любого натурального числа $n$ при $p^m = 2$ очевидно, при $p^m = 3$ доказано в работе [1], при $p^m = 4$ — [2], а для $p \geqslant 5$, $m = 1$ в работе [3].

Несмотря на трудности описания группы $K(p^m, n)$, в данной заметке удается получить некоторую информацию о нормальном строении группы автоморфизмов фактор-группы $K(p^m, n)$ по любой ее истинной характеристической группе (теорема). В частности исследовано нормальное строение групп автоморфизмов группы Бернсайда $K(3, n)$ (следствие 2), группы Санова $K(4, n)$ (следствие 3), группы Кострикина $K(p, n)$ (следствие 4).

Группу всех обратимых матриц степени $n$ над полем из $p$ элементов с определителем 1 либо — 1 будем обозначать через $SL^*(n, p)$. Остальные применяемые обозначения общеприняты [4] либо понятны из текста.

Теорема *Пусть $X$ — истинная характеристическая подгруппа группы $K = K(p^m, n)$, $A = \mathrm{Aut}(K/X)$, $C = (x \mid x \in A,\ xy = yx$ для всех $y \in K|X|\Phi(K \mid X)$. Тогда $X \leqslant \Phi(K)$, а в группе $A$ имеется нормальный ряд $1 \leqslant C \leqslant B \leqslant A$ такой, что $C$ — $p$ -группа, $B \mid C$ изоморфна $SL^*(n, p)$, $A|B$ — циклическая группа порядка, делящего $p - 1/2$ при $p > 2$, либо единичная группа при $p = 2$.*

Доказательство. Если $n = 1$, то $K$ — циклическая группа порядка $p^m$, $|X| = p^r$, где $0 \leqslant r < m$, $\mathrm{Aut}(K \mid X)$ — циклическая группа порядка $p^{m-r-1}(p-1)$ при $p > 2$ либо абелева группа порядка $2^{m-r-1}$ при $p = 2$. Легко видеть, что заключение теоремы верно.

Пусть $n \geqslant 2$. Рассмотрим сначала случай, когда $X \leqslant \Phi(K)$.

Группа $K \mid X$ — фактор-группа свободной группы $F_n$ с $n$ свободными порождающими элементами по некоторой характеристической подгруппе $N$. При естественном гомоморфизме $F_n \to F_n| N$ свободные порождающие элементы $f_1, f_2, \ldots, f_n$ группы $F_n$ отображаются соответсвенно в порождающие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ группы $K \mid X$. Поскольку $X \leqslant \Phi(K)$, то группа $K \mid X$ меньшим числом элементов порождаться не может.

В работе [5] показано, что $\mathrm{Aut}\, F_n$ порождается следующими элементарными автоморфизмами: 1) $p_{ij}$: $f_i \to f_j$, $f_j \to f_i$, $j \neq i$, $f_k \to f_k$, $k \neq i, j$, 2) $r_i$: $f_i \to f_i^{-1}$, $f_k \to f_k$, $k \neq i$; 3) $t_{ij}$: $f_i \to f_i f_j$, $j \neq i$, $f_k \to f_k$, $k \neq i$; 4) $s_{ij}: f_i \to f_j f_i$, $j \neq i$, $f_k \to f_k$, $k \neq i$; где $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Эти автоморфизмы индуцируют соответствующие автоморфизмы в группе $K \mid X$, заданные уже на порождающих элементах $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Сохраняя для удобства те же обозначения для них, считаем, что группа $A = \mathrm{Aut}(K \mid X)$ содержит подгруппу $D = (p_{ij}, r_i, t_{ij}, s_{ij} \mid j \neq i,\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

При естественном гомоморфизме $K|X \to K|X|\Phi(K \mid X)$ порождающие элементы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ отображаются соответственно в порождающие элементы $y_1, y_2, \ldots, y_n$ группы $K|X|\Phi(K|X)$. Легко видеть, что эта группа меньшим числом элементов порождаться не может. Так как $\Phi(K \mid X)$ — характеристическая подгруппа группы $K| X$, $K|X|\Phi(K|X)$ — абелева группа периода $p$, то автоморфизмы $p_{ij}$, $r_i$, $t_{ij}$, $s_{ij}$ из группы $D$ индуцируют автоморфизмы $\pi_{ij}$, $\rho_i \tau_{ij}$ группы $K \mid X \mid \Phi(K \mid X)$: 1) $\pi_{ij}: y_i \to y_j$, $y_j \to y_i$, $j \neq i$, $y_k \to y_k$, $k \neq i, j$; 2) $\rho_i : y_i \to y_i^{-1}$, $y_k \to y_k$, $k \neq i$; 3) $\tau_{ij}: y_i \to y_i y_j$, $j \neq i$, $y_k \to y_k$, $k \neq i$; где $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Очевидно, что подгруппа $C = (x \mid x \in A\ xy = yx)$ для всех $y \in K \mid X \mid \Phi \times (K \mid X)$ нормальна в группе $A = \mathrm{Aut}(K \mid X)$ и централизует фактор-группу $K \mid X \mid \Phi(K \mid X)$. Поэтому, в группе $\mathrm{Aut}(K \mid X \mid \Phi(K \mid X)$ имеется ряд $1 \leqslant B \mid C \leqslant A \mid C \leqslant \mathrm{Aut}(K \mid X \mid \Phi(K \mid X))$, где $B = CD$, $B \mid C = (\pi_{ij}, \rho_i, \tau_{ij} \mid j \neq i;\ i, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$.

Так как $K \mid X$ — конечная $p$—группа, то по теоереме Холла $C$ является также $p$-группой.

Легко видеть, что $K \mid X \mid \Phi(K \mid X) = (y_1) \times (y_2) \times \ldots \times (y_n)$, где $|y_1| = |y_2| = \ldots = |y_n| = p$. Поэтому Aut $(K \mid X \mid \Phi(K \mid X))$ изоморфна $GL(n, p)$ — подгруппе всех обратимых матриц степени $n$ над полем из $p$ элементов. Очевидно, что $\tau_{ij}^{\alpha}$, где $j \neq i$, $\alpha \in \{1, 2, \ldots, p\}$—трансвекции.

Хорошо известно, что все трансвекции порождают группу, изоморфную $SL(n, p)$ -группе всех обратимых матриц степени $n$ над полем из $p$ элементов с определителем 1. Поэтому, подгруппа $(\tau_{ij} \mid j \neq i,$ $i, j \in \{1, 2, \ldots, n$ ) изоморфна $SL(n, p)$, а подгруппа $B \mid C = (\pi_{ij}, \rho_i, \tau_{ij} \mid$ $j \neq i$: $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\})$ изоморфна $SL^*(n, p)$ -группе всех обратимых матриц степени $n$ над полем из $p$ элементов с определителем 1 либо —1. Так как $SL^*(n, p)$ — нормальная подгруппа в $GL(n, p)$, фактор-группа $GL(n, p) \mid SL^*(n, p)$ изоморфна циклической группе порядка $p - 1 \mid 2$ при $p > 2$ либо единичной группе при $p = 2$, то $B$ — нормальная подгруппа группы $A$, а $A \mid B$ — циклическая группа порядка, делящего $p - 1 \mid 2$ при $p > 2$, либо единичная группа при $p = 2$.

Известно, что группа $SL^*(n, p)$ — неприводимая группа матриц. Поэтому фактор-группа $B \mid C$ и подгруппа $B$ из $A$ действуют тоже неприводимо на фактор-группе $K \mid \Phi(K)$. Отсюда следует, что любая истинная характеристическая подгруппа $X$ из $K$ содержится в $\Phi(K)$. Теорема доказана.

Из доказанной теоремы и теоремы Жордана — Диксона легко видеть, что выводятся следующие следствия. Везде $X$ — истинная характеристическая подгруппа группы $K(p^m, n)$.

Следствие 1. *Среди фактор-групп любого нормального ряда группы* Aut$(K(p^m, n) \mid X)$ *при* $n \geqslant 2$ *содержится лишь одна простая неабелева группа, изоморфная* $PSL(n, p)$, *за исключением двух случаев:* $p = 2$, $n = 2$ *и* $p = 3$, $n = 2$.

Следствие 2. *Группа* Aut $(K(3^m, n) \mid X)$ *является расширением 3-группы с помощью* $SL^*(n, 3)$. *В частности, группа автоморфизмов Бернсайда* $K(3, n)$ — *расширение 3-группы с помощью* $SL^*(n, 3)$.

Следствие 3. *Группа* Aut $(K(2^m, n) \mid X)$ — *расширение 2-группы с помощью* $PSL(n, 2)$. *В частности, группа автоморфизмов группы Санова* $K(4, n)$ — *расширение 2-группы с помощью* $PSL(n, 2)$.

Следствие 4 [6]. *В группе автоморфизмов* $A$ *группы Кострикина* $K(p, n)$ *имеется нормальный ряд* $1 \leqslant C \leqslant B \leqslant A$ *такой, что* $C$ — *p-группа,* $B \mid C$ *изоморфна* $SL(n, p)$ $A \mid B$ — *циклическая группа порядка, делящего* $p - 1$.

1. Burnside W. On an unsettled guestion in the theory of discontinuous groups. Quart. J. Pure and Appl. Math., 1902, 33, p. 230—238.
2. Санов И. Н. Решение проблемы Бернсайда для показателя 4.— Уч. зап. Ленингр. ун-та, сер. мат., 1940, **10**, с. 166 170.
3. Кострикин А. И. О проблеме Бернсайда. Изв. АН СССР, сер. мат., 1959, **23**, с. 3—34.
4. Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. М.: Наука, 1972. 239 с.
5. Nielsen I. Die Isomophismengruppe der freien Gruppen. Math. Ann., 1924, **91**, p. 169—209.
6. Нагребецкий В. Т. О группе автоморфизмов конечной группы $K(p, n)$.— Тез. докл. VI Всесоюзного симпозиума по теории групп. К.: Наук. думка, 1978, с. 44.

Хмельницкий технологический институт
бытового обслуживания

Поступила в редакцию
25.02.1980 г.