УДК 517.946.9:517.947.43

Л. П. Нижник, Л. А. Тараборкин

Краевые задачи для уравнения теплопроводности с производной по времени в условиях сопряжения

1. Постановка задачи. Пусть $\Omega \subset E^n$ — ограниченная область с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, Γ — достаточно гладкая поверхность, гомеоморфная сфере, разбивающая область Ω на две подобласти: внутреннюю Ω_1 и внешнюю $\Omega_2 = \Omega \setminus (\Omega_1 \cup \Gamma)$, причем Γ и $\partial\Omega$ не имеют общих точек.

В каждой из областей Ω_i $(i = 1, 2)$ требуется найти решение нелинейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u_i(t, x)}{\partial t} = \Delta u_i(t, x) + \varphi_i(t, x, u_i(t, x)), \quad x \in \Omega_i. \tag{1}$$

Решения u_1 и u_2 должны удовлетворять условиям сопряжения на Γ:

$$u_1(t, x) = u_2(t, x) = u_3(t, x), \quad x \in \Gamma; \tag{2}$$

$$\frac{\partial u_3(t, x)}{\partial t} = \frac{\partial u_2(t, x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_1(t, x)}{\partial \nu} + \varphi_3(t, x, u_3(t, x)), \quad x \in \Gamma;$$

здесь ν — орт нормали к поверхности Γ, внешний по отношению к области Ω_1. На внешней границе Ω_2, т. е. на $\partial\Omega$, решение u_2 удовлетворяет однородным граничным условиям. Пусть это будет условие Дирихле:

$$u_2(t, x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \tag{3}$$

Кроме этого, заданы начальные условия

$$u_i(0, x) = u_{i0}(x), \quad x \in \Omega_i \ (i = 1, 2); \ x \in \Gamma \ (i = 3). \tag{4}$$

Функции $\varphi_i(t, x, u_i)$ $(i = 1, 2, 3)$ задают нелинейную зависимость правых частей от решения. Условия (1)—(4) представляют в совокупности смешанную задачу для уравнения теплопроводности, содержащую производную по времени от искомой функции в условиях сопряжения.

Это — основная задача, для которой будут доказана теорема существования и единственности решения, изучены свойства гладкости ее обобщенных решений и даны условия повышения гладкости решений.

Методика получения результатов, аналогична методике работы [1] и состоит в сведении задачи (1)—(4) к задаче Коши для абстрактного эволюционного уравнения и применении общих теорем, касающихся такого уравнения.

2. Основной оператор. С задачей (1)—(4) естественно связать оператор A_0, действующий в гильбертовом пространстве $H \stackrel{d}{=} L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \oplus L_2(\Gamma)$, элементами которого являются вектор-функции $U(x)$ с тремя компонентами $u_1(x)$, $u_2(x)$, $u_3(x)$, определенными и суммируемыми с квадратом соответственно на Ω_1, Ω_2 и на Γ. В качестве области определения оператора A_0 возьмем множество B:

$$B \stackrel{d}{=} \left\{ U(x) = \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} : u_i(x) \in C^2(\overline{\Omega}_i), \qquad i = 1, 2; \right.$$

$$\left. u_1(x)|_\Gamma = u_2(x)|_\Gamma = u_3(x); \quad u_2(x)|_{\partial\Omega} = 0 \right\}. \tag{5}$$

Множество B плотно в H. Закон действия оператора A_0 зададим равенством

$$A_0 U \equiv A_0 \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} \overset{\mathrm{d}}{=} \begin{pmatrix} -\Delta u_1(x) \\ -\Delta u_2(x) \\ \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial \nu} - \dfrac{\partial u_2(x)}{\partial \nu} \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Л е м м а 1. *Оператор A_0 симметрический в H. Его замыкание — самосопряженный положительный оператор в H.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U, V \in B$. Учитывая определение оператора A_0, получим:

$$(A_0 U, V)_H = -\sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega_j} \Delta u_j(x) \overline{v_j(x)}\, dx + \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial \nu} \right) \bar{v}_3(x)\, d\sigma. \tag{7}$$

Если в (7) воспользоваться формулой Грина, легко получить (с учетом $U, V \in B$)

$$(A_0 U, V)_H = (U, A_0 V)_H.$$

Таким образом, оператор A_0 симметрический. Если в (7) положить $U = V$ и воспользоваться первой формулой Грина, получим

$$(A_0 U, U)_H = \sum_{j=1}^{2} \int_{\Omega_j} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\partial u_j(x)}{\partial x_k} \right|^2 dx \geqslant 0. \tag{8}$$

Неравенство (8) показывает, что оператор A_0 положителен.

Докажем, что оператор A_0 существенно самосопряжен, т. е. что замыкание оператора A_0 — самосопряженный оператор. Так как область определения B оператора A_0 плотна в H, то достаточно показать, что область значений оператора $A_0 + I$ плотна в H. Покажем, что в область значений оператора $A_0 + I$ входят все вектор-функции с гладкими компонентами. Это утверждение эквивалентно существованию для таких F решений $U \in B$ уравнения $(A_0 + I)\, U = F$, т. е. разрешимости задачи

$$\begin{gathered} -\Delta u_i(x) + u_i(x) = f_i(x), \quad x \in \Omega_i \quad (i = 1, 2) \\ u_1(x) = u_2(x) = u_3(x), \quad x \in \Gamma, \\ \frac{\partial u_1(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial \nu} + u_3(x) = f_3(x), \quad x \in \Gamma, \\ u_2(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega. \end{gathered} \tag{9}$$

для любых гладких правых частей $f_i(x)$ $(i = 1, 2, 3)$. Разрешимость задачи (9) в классе гладких функций следует из [2].

3. С в е д е н и е к а б с т р а к т н о й з а д а ч е К о ш и. Рассмотрим оператор $A = \bar{A}_0 + I$, где $\bar{A}_0$ — замыкание в H оператора A_0. Этот оператор самосопряжен и строго положителен: $(AU, U)_H \geqslant (U, U)_H$. На B он действует по правилу

$$AU \equiv A \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta u_1 + u_1 \\ -\Delta u_2 + u_2 \\ \dfrac{\partial u_1}{\partial \nu} - \dfrac{\partial u_2}{\partial \nu} + u_3 \end{pmatrix}. \tag{10}$$

Учитывая явный вид оператора A, задачу (1)—(4) можно записать в виде задачи Коши для нелинейного эволюционного уравнения в гильбертовом пространстве H:

$$\frac{dU(t)}{dt} = -AU(t) + \Phi(t, U(t)) \tag{11}$$

$$U(0) = U_0.$$

Здесь $U(t)$ — вектор-функция с компонентами $u_i(t, x)$ $(i = 1, 2, 3)$, а нелинейный оператор $\Phi(t, U)$ определяется функциями $\varphi_i(t, x, u_i)$:

$$\Phi(t, U) = \begin{pmatrix} \varphi_1(t, x, u_1) - u_1 \\ \varphi_2(t, x, u_2) - u_2 \\ \varphi_3(t, x, u_3) - u_3 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Определение 1. (см. [4]) Вектор-функция $U(t)$ со значениями в H называется решением задачи (11), если она непрерывна в H на $[0, T]$, удовлетворяет начальному условию, а вектор-функции $\frac{dU(t)}{dt}$, $AU(t)$, $\Phi(t, U(t))$ непрерывны по $t \in [0, T]$ в H и уравнение (11) удовлетворяется тождественно.

Определение 2. Функции $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$, $u_3(t, x)$, определенные на $[0, T] \times \Omega_1$, $[0, T] \times \Omega_2$, $[0, T] \times \Gamma$, соответственно, называются обобщенным решением задачи (1)—(4), если составленная из них вектор-функция $U(t) = \mathrm{col}(u_1, u_2, u_3)$ — решение в H задачи (11).

Ясно, что если обобщенное решение задачи (1)—(4) — дважды непрерывно дифференцируемая функция, то оно является классическим решением.

Таким образом, основная задача (1)—(4) сведена к задаче Коши (11) для эволюционного уравнения.

4. Дробные степени оператора A. Оператор A самосопряжен и строго положителен $(AU, U)_H \geqslant (U, U)_H$. Поэтому существуют произвольные неотрицательные степени A^s $(s \geqslant 0)$ оператора A, являющиеся самосопряженными строго положительными операторами $(A^sU, U)_H \geqslant (U, U)_H$. Области определения $D(A^s)$ операторов A^s представляют собой полные гильбертовы пространства $\mathbf{H}_s \overset{d}{=} D(A^s)$ относительно нормы

$$\| U \|_{\mathbf{H}_s} = \| A^s U \|_H. \tag{13}$$

Ясно, что $\| U \|_{\mathbf{H}_{s_1}} \leqslant \| U \|_{\mathbf{H}_{s_2}}$ при $s_1 \leqslant s_2$ и пространства $\mathbf{H}_s$ образуют гильбертову шкалу пространств [5].

Лемма 2. *Область определения $D(A^{1/2})$ связана с соболевскими пространствами равенством*

$$D(A^{1/2}) = \left\{ U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} : u_i(x) \in W_2^1(\Omega_i),\ i = 1, 2;\ u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = u_3 \right\}. \tag{14}$$

Норма $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_{1/2}}$ эквивалентна норме в пространстве $W_2^1(\Omega_1) \oplus W_2^1(\Omega_2)$ (ниже для кратности обозначаем $W_2^h(\Omega_1) \oplus W_2^h(\Omega_2) \overset{d}{=} W_2^h$, $h \geqslant 0$):

$$c_1 \sum_{j=1}^{2} \| u_j \|_{W_2^1(\Omega_j)} \leqslant \| U \|_{\mathbf{H}_{1/2}} \leqslant c_2 \sum_{j=1}^{2} \| u_j \|_{W_2^1(\Omega_j)}. \tag{15}$$

Доказательство. Предварительно установим эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_{1/2}}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1 \oplus W_2^{1/2}(\Gamma)}$ на множестве B. Если $U \in B$, то $\| U \|^2_{\mathbf{H}_{1/2}} = (AU, U)_H = (A_0U, U)_H + (U, U)_H$. Учитывая (8) и определение пространств Соболева, получаем эквивалентность норм $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_{1/2}}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1 \oplus L_2(\Gamma)}$ на B. Так как на B оператор A существенно самосопряжен, то B плотно в $D(A^{1/2})$, и поэтому нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{H}_{1/2}}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1 \oplus L_2(\Gamma)}$ эквивалентны на $D(A^{1/2})$. С другой стороны, в силу теорем вложения нормы $\|\cdot\|_{W_2^1 \oplus L_2(\Gamma)}$ и $\|\cdot\|_{W_2^1 \oplus W_2^{1/2}(\Gamma)}$ эквивалентны.

Итак, множество $D(A^{1/2})$ может быть получено из B замыканием по норме пространства $W_2^1(\Omega_1) \oplus W_2^1(\Omega_2) \oplus W_2^{1/2}(\Gamma)$. Поэтому $D(A^{1/2})$ состоит из элементов, указанных в (14), и справедливо (15). Осталось доказать, что если U имеет вид (14), то $U \in D(A^{1/2})$. Если бы это было не так, то существовал бы элемент V вида (14), ортогональный $D(A^{1/2})$ в смысле пространства $W_2^1 \oplus L_2(\Gamma)$, т. е.

$$\sum_{j=1}^{2}\left[(v_j, u_j)_{L_2(\Omega_j)} + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k}, \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\right)_{L_2(\Omega_j)}\right] + (v_3, u_3)_{L_2(\Gamma)}.$$

Из этого равенства, полагая $U \in B$ и применяя формулу Грина, можно получить $(V, AU)_H = 0$, что означает $V \in D(A^*)$. Так как A — самосопряженный оператор, то $V \in D(A) \subset D(A^{1/2})$, что противоречит выбору $V \perp D(A^{1/2})$, а значит, справедливо (14).

Теорема 1. *Область определения $D(A^\delta)$ дробных степеней оператора A связана с соболевскими пространствами следующими топологическими включениями:*

$$\text{а)}\ D(A^\delta) = W_2^{2\delta}(\Omega_1) \oplus W_2^{2\delta}(\Omega_2) \oplus W_2^{\delta}(\Gamma), \quad \delta \in \left[0, \frac{1}{4}\right);$$

$$\text{б)}\ D(A^\delta) \subset W_2^{2\delta}(\Omega_1) \oplus W_2^{2\delta}(\Omega_2) \oplus W_2^{\delta}(\Gamma), \quad \delta \in \left[\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right];$$

$$\text{в)}\ D(A^\delta) \subset W_2^{1/2+\delta}(\Omega_1) \oplus W_2^{1/2+\delta}(\Omega_2) \oplus W_2^{\delta}(\Gamma), \quad \delta \in \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right].$$

Доказательство. Наряду с гильбертовой шкалой $\mathbf{H}_\delta^{(1)} \overset{d}{=} D(A^\delta)$, рассмотрим гильбертову шкалу $\mathbf{H}_\delta^{(2)}$, соединяющую пространства H и $W_2^1 \oplus W_2^{1/2}(\Gamma)$ с нормой, эквивалентной норме пространства $W_2^{2\delta} \oplus W_2^{\delta}(\Gamma)$.

Рассмотрим оператор вложения P_1 из шкалы $\mathbf{H}_\delta^{(1)}$ в шкалу $\mathbf{H}_\delta^{(2)}$. При $\delta = 0$ пространства $\mathbf{H}_0^{(1)} = H$ и $H_0^{(2)} = H$ совпадают, и поэтому оператор P_1 ограничен. При $\delta = 1/2$ в силу леммы 2 оператор P_1 также непрерывен. На основании интерполяционной теоремы [6] оператор P_1 непрерывен при всех $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$, что доказывает включение б) при значениях $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$.

Введем шкалу $\mathbf{H}_\delta^{(3)}$, соединяющую пространства $L_2(\Omega_1) \oplus L_2(\Omega_2) \overset{d}{=} \mathbf{H}_0^{(3)}$ и $\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_1) \oplus \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega_2) \overset{d}{=} \mathbf{H}_1^{(3)}$, с нормой, соответствующей при $\delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ норме пространства W_2^δ, и оператор P_2 из шкалы $\mathbf{H}^{(3)}$ в $\mathbf{H}^{(1)}$, действующий по правилу:

$$P_2 : \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Непрерывность вложения $\mathbf{H}_0^{(3)} \to \mathbf{H}_0^{(1)} \equiv H$ очевидна, а непрерывность вложения $P_2 : \mathbf{H}_1^{(3)} \to \mathbf{H}_{1/2}^{(1)}$ следует из леммы 2, поэтому, вследствие интерполяционной теоремы

$$\mathbf{H}_{2\delta}^{(3)} \oplus \{0\} \subset \mathbf{H}_\delta^{(1)}, \quad \delta \in \left[0, \frac{1}{2}\right). \tag{16}$$

Пусть шкала $\mathbf{H}_\delta^{(4)}$ соединяет пространства $L_2(\Gamma) \overset{d}{=} \mathbf{H}_0^{(4)}$ и $W_2^{1/2}(\Gamma) \overset{d}{=} \mathbf{H}_1^{(4)}$; тогда норма в этой шкале эквивалентна норме в пространстве $W_2^{\delta/2}(\Gamma)$, $\delta \in [0, 1]$. Примем, что оператор P_3 каждой функции $f(x) \in L_2(\Gamma)$ сопоставляет вектор-функцию $\operatorname{col}(u^{(1)}(x), u^{(2)}(x), f(x))$, где $u^{(i)}(x)$ — решения таких задач Дирихле

$$\begin{aligned}\Delta u^{(1)}(x) &= 0\\ u^{(1)}(x)|_\Gamma &= f(x)\end{aligned} \quad (\text{в } \bar{\Omega}_1); \qquad \begin{aligned}\Delta u^{(2)}(x) &= 0\\ u^{(2)}(x)|_{\partial\Omega} &= 0\\ u^{(2)}(x)|_\Gamma &= f(x)\end{aligned} \quad (\text{в } \bar{\Omega}_2),$$

причем, как известно, при $f(x) \in W_2^\delta(\Gamma)$ имеем $u^{(i)}(x) \in W_2^{\delta+\frac{1}{2}}(\Omega_i)$ и

$$\| u^{(i)} \|_{W_2^{\delta+\frac{1}{2}}(\Omega_i)} \leqslant c \| f \|_{W_2^\delta(\Gamma)}, \quad i = 1, 2; \qquad \delta \geqslant 0. \tag{17}$$

Поэтому $\| P_3 f \|_H^2 = \sum_{j=1}^{2} \| u^{(j)} \|_{L_2(\Omega_j)}^2 + \| f \|_{L_2(\Gamma)} \leqslant c \| f \|_{L_2(\Gamma)}^2$, что означает непрерывность оператора P_3 из $L_2(\Gamma) = \mathbf{H}_0^{(4)}$ в $H = \mathbf{H}_1^{(4)}$. С другой стороны, так как при $f(x) \in W_2^{1/2}(\Gamma)$ имеем $u^{(i)}(x) \in W_2^1(\Omega_i)$ $(i = 1, 2)$, то, по лемме 2, $\operatorname{col}(u^{(1)}, u^{(2)}, f) \in D(A^{1/2})$ и, вследствие (17): $\| P_3 f \|_{\mathbf{H}_{1/2}}^2 \leqslant c \| f \|_{W_2^{1/2}(\Gamma)}^2$, что показывает непрерывность вложения из $W_2^{1/2}(\Gamma) = \mathbf{H}_1^{(4)}$ в $D(A^{1/2}) = \mathbf{H}_{1/2}^{(1)}$.

Таким образом, по интерполяционной теореме, $P_3 : \mathbf{H}_{2\delta}^{(4)} \to \mathbf{H}_\delta^{(1)}$, $\delta \in [0, 1/2]$ непрерывен; из этого факта, с учетом $1/2 + \delta > 2\delta$ при $\delta < 1/4$, а также линейности $D(A^\delta)$, нетрудно вывести

$$\{0\} \oplus \{0\} \oplus W_2^\delta(\Gamma) \subset D(A^\delta), \quad \delta \in [0, 1/4). \tag{18}$$

Включение (18) совместно с (16) дает $W_2^{2\delta}(\Omega_1) \oplus W_2^{2\delta}(\Omega_2) \oplus W_2^\delta(\Gamma) \subset D(A^\delta)$, $\delta \in \left[0, \frac{1}{4}\right)$, что составляет пункт а).

Для доказательства в) возьмем $U(x) \in D(A^\delta)$, $\delta = 1 + \varepsilon$, $\varepsilon \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$. Тогда $F \overset{d}{=} A^\delta U \subset H$, $AU \subset D(A^\varepsilon)$;

$$\| AU \|_{W_2^{2\varepsilon} \oplus W_2^\varepsilon(\Gamma)} \leqslant c \| F \|_H; \qquad \| U \|_{W_2^{2\varepsilon} \oplus W_2^\varepsilon(\Gamma)} \leqslant c \| F \|_H. \tag{19}$$

Пусть $AU \overset{d}{=} \operatorname{col}(g_1, g_2, g_3)$ (и принадлежит пространству $W_2^{2\varepsilon} \oplus W_2^\varepsilon(\Gamma)$ согласно пункту б)). По определению оператора A

$$-\Delta u_i(x) = g_i(x) - u_i(x), \quad x \in \Omega_i; \ i = 1, 2$$

$$\frac{\partial u_1(x)}{\partial \nu} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial \nu} = g_3(x) - u_3(x), \quad x \in \Gamma; \ u_1|_\Gamma = u_2|_\Gamma = u_3(x); \quad u_2|_{\partial\Omega} = 0.$$

Для такой задачи справедливо неравенство [3]

$$\left\| \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \end{pmatrix} \right\|_{W_2^{3/2}} \leqslant c \left\{ \left\| \begin{pmatrix} u_1(x) \\ u_2(x) \\ u_3(x) \end{pmatrix} \right\|_{W_2^{2\varepsilon} \oplus W_2^\varepsilon(\Gamma)} + \| AU \|_{W_2^{2\varepsilon} \oplus W_2^\varepsilon(\Gamma)}. \right. \tag{20}$$

Это неравенство с учетом (19) доказывает справедливость в) для значений $\delta \geqslant 1$. Построим, наконец, шкалу $\mathbf{H}_\delta^{(5)}$, соединяющую $W_2^1(\Omega_1) \oplus W_2^1(\Omega_2) \overset{d}{=} \mathbf{H}_{1/2}^{(5)}$ с $W_2^{3/2}(\Omega_1) \oplus W_2^{3/2}(\Omega_2) \overset{d}{=} \mathbf{H}_1^{(5)}$, и оператор $P_4 : \mathbf{H}_\delta^{(1)} \to \mathbf{H}_\delta^{(5)}$, сопоставляющий элементу $U = \operatorname{col}(u_1, u_2, u_3)$ первые его две компоненты.

Оператор P_4 непрерывен из $D(A^{1/2})$ в $W^{1/2}(\Omega_1) \oplus W_2^1(\Omega_2)$ (по лемме 2) и из $D(A)$ в $W_2^{3/2}(\Omega_1) \oplus W_2^{3/2}(\Omega_2)$ (в силу доказанной части пункта в) при $\delta = 1$). Применяя интерполяционную теорему, с учетом непрерывности вложения $W_2^{1/2+\delta}(\Omega_i)$ в $W_2^\delta(\Gamma)$, получаем утверждение пункта в) для $\delta \in [1/2, 1]$. Теорема доказана.

5. Локальная разрешимость задачи (1) — (4).

Теорема 2. *Существует и единственно решение задачи* (1) — (4), *если:* а) *функции* $\varphi_i(t, x, u)$ *удовлетворяют условию Липшица по* t, *и с константой Липшица* L, *степенным образом зависящей от* u (*равномерно по* t, x); б) *функции* $u_{i0}(x)$ $(i \underset{d}{=} 1, 2)$ *дважды непрерывно дифференцируемы в* $\overline{\Omega}_i$ *причем* $u_{10}|_\Gamma = u_{20}|_\Gamma = u_{30}$; $u_{20}|_{\partial\Omega} = 0$; в) *размерность области* $\dim \Omega \leqslant 3$.

Доказательство. Согласно изложенному в п. 3, достаточно показать существование и единственность решения абстрактной задачи Коши (11), которая [4] имеет (и единственное) решение, если для некоторого $a \in [0, 1)$: 1) функция $\Phi(t, U)$ определена в H $\forall U \in D(A^\alpha)$; 2) $\forall U, V$: $\| A^\alpha U \|_H \leqslant R$, $\| A^\alpha V \|_H \leqslant R$, $R = \mathrm{const}$: $\| \Phi(t_1, U) - \Phi(t_2, V) \|_H \leqslant c(R) \{ |t_1 - t_2| + \| A^\alpha U - A^\alpha V \|_H \}$; 3) $U_0 \in D(A^\alpha)$.

В нашем случае условие 3) выполняется очевидным образом, поскольку $U_0(x) = \mathrm{col}(u_{10}(x), u_{20}(x), u_{30}(x)) \in B \subset D(A)$. Проверка условий 1) и 2) проводится с помощью условия Липшица а):

$$|\varphi_i(t_1, x, u) - \varphi_i(t_2, x, v)|^2 \leqslant L(|t_1 - t_2|^2 + |u - v|^2) =$$

$$= c(1 + |u|^m + |v|^m)(|t_1 - t_2|^2 + |u - u|^2), \quad m \geqslant 1,$$

а также следующих топологических включений, справедливых в силу теорем вложения, теоремы 1 и условия в) $D(A^\alpha) \subset W_2^{3/2\alpha}(\Omega_1) \oplus W_2^{3/2\alpha}(\Omega_2) \oplus W_2^\alpha(\Gamma) \subset L_{m+2}(\Omega_1) \oplus L_{m+2}(\Omega_2) \oplus L_{m+2}(\Gamma)$ (см. [1], § 3).

6. Повышение гладкости решения.

Теорема 3. *Пусть функции* $\varphi_i(t, x, u)$ *непрерывно дифференцируемы по всем трем переменным, а их производные равномерно по* t, x *допускают степенные оценки роста по* u. *Если функции* $u_{i0}(x)$ *трижды непрерывно дифференцируемы, причем* $u_{10}|_\Gamma = u_{20}|_\Gamma = u_{30}$; $u_{20}|_{\partial\Omega} = 0$, *то решение задачи* (1) — (4) *принадлежит пространству* $W_2^{3/2+\delta}(\Omega_1) \oplus W_2^{3/2+\delta}(\Omega_2)$, $\delta \in [0, 1/4)$.

Доказательство этой теоремы аналогично приведенному в [1], § 4 (с очевидной заменой соответствующих пространств и операторов).

Следствие. *При выполнении условий теоремы* 3, *в силу теорем вложения и условия в), решение* $u_1(t, x)$, $u_2(t, x)$ *непрерывно в* $[0, T] \times \overline{\Omega}$.

1. Митропольский Ю. А., Нижник Л. П., Кульчицкий В. Л. Нелинейные задачи теплопроводности с производной по времени в граничном условии. Киев, 1974, 31. (Ин-т математики АН УССР. Препринт ИМ-74-15).
2. Олейник О. А. Об уравнениях эллиптического и параболического типа с разрывными коэффициентами.— Успехи мат. наук, 1959, **14**, 5, *164—166*.
3. Шефтель З. Г. Энергетические неравенства и общие граничные задачи для эллиптических уравнений с разрывными коэффициентами.— Сибирск. мат. журн., 1965, **6**, 3, *636—669*.
4. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966, 500.
5. Функциональный анализ. Под. ред. С. Г. Крейна. М.: Наука, 1972, 544.
6. Березанский Ю. М. Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. Киев: Наук. думка, 1965, *798*.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
29.07.1980 г.