УДК 517.5

В. Ф. Ковдрыш, Н. И. Нагнибида

О некоторых операторных уравнениях в классе непрерывных отображений аналитических пространств

В литературе все чаще появляются работы, посвященные решению определенных операторных уравнений в различных пространствах, исследования, связанные с описанием коммутантов, а также с нахождением условий эквивалентности тех или иных операторов. Вполне естественно, что в аналитических пространствах привлекают внимание в основном уравнения, содержащие операторы дифференцирования и интегрирования (с ними тесно связано само понятие аналитической функции), а также операторы умножения на аналитические функции. К таким исследованиям примыкает и настоящая статья.

Через A_R, $0<R\leqslant\infty$ ($\overline{A}_R$, $0\leqslant R<\infty$) в дальнейшем будем обозначать пространство всех однозначных и аналитических в круге $|z|<R$ ($|z|\leqslant R$) функций с общепринятой топологией [1], а через $\mathfrak{L}(A_R)$ ($\mathfrak{L}(\overline{A}_R)$) — множество всех линейных непрерывных отображений пространства A_R ($\overline{A}_R$) в себя. Напомним [2], что оператор L принадлежит множеству $\mathfrak{L}(A_R)$ ($\mathfrak{L}(\overline{A}_R)$) тогда и только тогда, когда элементы $l_{i,k}$ его матрицы в степенном базисе $\left(\text{т. е. } Lz^k=\sum\limits_{i=0}^{\infty} l_{i,k}z^i,\ k=0,1,\ldots\right)$ удовлетворяют условию $\forall\rho<R\ \exists r<R$ и $\exists C\geqslant 0$ ($\forall r>R\ \exists\rho>R$ и $\exists C\geqslant 0$)

$$|l_{i,k}|\leqslant C(r^k/\rho^i),\quad i,k=0,1,\ldots. \tag{1}$$

Рассмотрим уравнение

$$U^mX=\gamma XU^n \tag{2}$$

относительно оператора X, $X\in\mathfrak{L}(A_R)$ ($X\in\mathfrak{L}(\overline{A}_R)$, где $(Uf)(z)=zf(z)$ ($\forall f\in A_R$ или $\forall f\in\overline{A}_R$), $\gamma\in\mathbf{C}$, а $m,\ n\in\mathbf{N}$. Поскольку, как это вытекает из (2), $U^{km}X=\gamma^kXU^{kn}$, $k=0,1,\ldots$, то $U^{km}Xz^q=\gamma^kXz^{kn+q}$, $k=0,1,\ldots;\ 0\leqslant q\leqslant n-1$. Отсюда следует, что матрица искомого решения X уравнения (2) имеет вид

$$t_{im+p,\,kn+q}=\begin{cases}0, & i<k,\\ \gamma^{-k}t_{(i-k)m+p,q}, & i\geqslant k,\end{cases} \tag{3}$$

$i,k=0,1,\ldots;\ p=0,1,\ldots,m-1;\ q=0,1,\ldots,n-1$. Значит, элементы первых n столбцов матрицы оператора X могут быть выбраны, вообще говоря (см. ниже), как угодно, а соответствующее условие (1) непрерывности X в каждом из рассматриваемых двух пространств выглядит так:

$$\begin{gathered}|\gamma|^{-k}|t_{im+p,q}|\leqslant C(r^{kn+q}/\rho^{(k+i)m+p}),\\ i,k=0,1,\ldots;\ 0\leqslant p\leqslant m-1;\ \ 0\leqslant q\leqslant n-1.\end{gathered} \tag{4}$$

Учитывая, что в неравенствах (4) для пространства A_R величина ρ ($\rho<R$) произвольна, а для $\overline{A}_R$ произвольным является r ($r>R$), легко докажем следующее утверждение.

Лемма. *Для того чтобы оператор X был нетривиальным решением уравнения (2) в классе $\mathfrak{L}(A_R)$ ($\mathfrak{L}(\overline{A}_R)$), необходимо и достаточно, чтобы его матрица определялась рекуррентными соотношениями (3), характеристические функции $x_q(z)=\sum\limits_{i=0}^{\infty}t_{i,q}z^i$, $q=0,1,\ldots,n-1$, были отличны от тождественного нуля и принадлежали пространству A_R ($\overline{A}_R$) и при $R<\infty$ ($R>0$) выполнялось дополнительное условие $|\gamma|\geqslant R^{m-n}$.*

Из этой леммы непосредственно вытекает такое следствие.

Следствие 1. *Уравнение* (2) *имеет в классах* $\mathfrak{L}(A_R)$ *и* $\mathfrak{L}(\bar{A}_R)$ *только тривиальное решение* (*т. е.* $X = \Theta$, *где* Θ — *оператор аннулирования*) *в том и только том случае, когда* $0 < R < \infty$ *и* $|\gamma| < R^{m-n}$.

Если же условия леммы выполняются, то все решения X соответствующих уравнений (2) можно записать в виде

$$X = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{n-1} t_{i,q} U^{i-q} Z_n^m (\gamma) P_q^{(n)}, \tag{5}$$

где при $i < q$ $U^{i-q} = \Delta^{q-i}$ и $(\Delta f)(z) = [f(z) - f(0)]/z$, а $Z_n^m(\gamma) z^{kn+q} = \gamma^{-k} z^{km+q}$, $k \geqslant 0$; $0 \leqslant q \leqslant n-1$, и $P_q^{(n)} z^{kn+l} = \delta_{q,l} z^{kn+q}$, $k \geqslant 0$; $0 \leqslant l, q \leqslant n-1$; здесь $\delta_{q,l}$ — символ Кронеккера.

Теорема 1. *Для того чтобы оператор* X *был нетривиальным решением уравнения* (2) *и принадлежал классу* $\mathfrak{L}(A_R)$ ($\mathfrak{L}(\bar{A}_R)$), *необходимо и достаточно, чтобы он имел вид* (5), *его характеристические функции были отличными от тождественного нуля и принадлежали пространству* $A_R(\bar{A}_R)$ *и при* $R < \infty$ ($R > 0$) *выполнялось дополнительное условие* $|\gamma| \geqslant R^{m-n}$.

Замечание 1. Поскольку мы ищем решения уравнения (2) только в классах $\mathfrak{L}(A_R)$ или $\mathfrak{L}(\bar{A}_R)$, то условие принадлежности их характеристических функций к соответствующим пространствам является, очевидно, излишним, ибо $x_q(z) = Xz^q$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$.

Замечание 2. Как это следует из представления (5), для любых функций $x_0(z), x_1(z), \ldots, x_{n-1}(z)$, принадлежащих пространствам A_R или $\bar{A}_R$, при выполнении условия $|\gamma| \geqslant R^{m-n}$ всегда можно построить такой (и притом единственный!) оператор X из класса $\mathfrak{L}(A_R)$ или $\mathfrak{L}(\bar{A}_R)$ соответственно, что $Xz^q = x_q(z)$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$, и $U^m X = \gamma X U^n$.

Замечание 3. При $\gamma = 1$ и $m = n$ из теоремы 1 получаем утверждение, характеризующее все коммутанты оператора U^n в пространствах A_R и $\bar{A}_R$ [3]. Напомним [3], что при выполнении условия (и только в этом случае!)

$$\det \| z^{-q} (P_q^{(n)} x_l)(z) \|_{l,q=0}^{n-1} \neq 0, \quad \forall z : |z| < R, \tag{6}$$

соответствующий оператор X является изоморфизмом пространства A_R на себя, перестановочным с U^n, а условие (6) необходимо и достаточно для квазистепенной базисности системы $\{z^{kn}(x_0(z), x_1(z), \ldots, x_{n-1}(z))\}_{k=0}^{\infty}$ в этом же пространстве. При этом любопытно, на наш взгляд, отметить, что в случае $x_q(z) = z^q \varphi_q(z)$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$, соответствующее условие (6) равносильно такому:

$$\det \| \omega^{ql} \varphi_q (z\omega^l) \|_{l,q=0}^{n-1} \neq 0 \text{ при } |z| < R \tag{7}$$

(здесь $\omega = \exp 2\pi i n^{-1}$). Это непосредственно следует из представления проекторов $P_q^{(n)}$ в виде

$$(P_q^{(n)} f)(z) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \omega^{-qj} f(z\omega^j), \quad \forall f \in A_R.$$

Интересно, что раньше условие (7) фигурировало в ошибочной работе [6] лишь в качестве достаточного для базисности соответствующей системы функций (см. [4, 5]).

Приведем еще некоторые следствия из полученных утверждений.

Следствие 2. *Пусть функции* $\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z)$ *принадлежат пространству* A_R, *а* $m \leqslant n$. *Если среди них существует* m *таких функций* $\tilde{\psi}_0(z), \tilde{\psi}_1(z), \ldots, \tilde{\psi}_{m-1}(z)$, *что* $\det \| z^{-q} (P_q^{(m)} \tilde{\psi}_l)(z) \|_{l,q=0}^{m-1} \neq 0$ *при*

$|z|<R$, *то система* $\{z^{km}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}\}(z)\}_{k=0}^{\infty}$ *полна в* A_R. *Кроме того, оператор* X, $X \in \mathfrak{L}(A_R)$, *удовлетворяющий уравнению* (2) *и условиям* $Xz^q = \psi_q(z)$, $q = 0, 1, \ldots, n-1$, *переводит каждую полную в* A_R *систему в полную.*

Первая часть этого утверждения очевидна, а справедливость второй вытекает из того, что для построенного оператора X выполняются соотношения $z^{km}\psi_q(z) = \gamma^k X z^{kn+q}$, $k \geqslant 0$; $0 \leqslant q \leqslant n-1$. Следовательно, X переводит степенную систему в полную в A_R систему $\{\gamma^{-k} z^{km}(\psi_0(z), \psi_1(z), \ldots, \psi_{n-1}(z))\}_{k=0}^{\infty}$. Поэтому он обладает указанным свойством и по отношению к любой другой системе, полной в A_R (см. [7]).

Замечание 4. Рассматриваемая в следствии 2 система никогда не может быть полной в пространстве A_R при $m > n$, ибо в этом случае всегда можно построить ненулевой функционал, аннулирующийся на всех функциях системы. Остается лишь воспользоваться известным критерием Банаха полноты систем в пространстве A_R.

Наконец, следуя терминологии, введенной в работе [8], набор $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ функций из A_R назовем сильно циклическим вектором оператора U^n, если для произвольного набора $(g_0, g_1, \ldots, g_{n-1})$, $g_i \in A_R$, существует хотя бы один коммутант X оператора U^n такой, что

$$(X\varphi_i)(z) = g_i(z), \quad i = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Обозначим через $K(U^n)$ $(K(U^n) \subset \mathfrak{L}(A_R))$ множество всех коммутантов оператора U^n в пространстве A_R. Учитывая замечание 2 при $\gamma = 1$ и $m = n$, а также тот факт, что два коммутанта оператора U^n совпадают на всем пространстве A_R тогда и только тогда, когда они совпадают на функциях $\{z^l\}_{l=0}^{n-1}$, задачу о нахождении условий сильной цикличности можно сформулировать и в такой (равносильной) форме. Требуется найти условия, которым должен удовлетворять оператор $B \in K(U^n)$ и при которых для всякого $A \in K(U^n)$ существует такой $X \in K(U^n)$, что $XB = A$ (здесь, очевидно, B и A таковы, что $Bz^i = \varphi_i(z)$ и $Az^i = g_i(z)$ при всех $i = 0, 1, \ldots, n-1$).

Поскольку в качестве правой части ввиду ее произвольности мы можем взять, в частности, изоморфизм $A \in K(U^n)$, а (см. [3]) произведение двух коммутантов оператора U^n является изоморфизмом лишь в том и только том случае, когда таковыми являются оба сомножителя, то B — также изоморфизм и $X = AB^{-1}$.

Следовательно, верна теорема.

Теорема 2. *Пусть функции* $\varphi_0(z), \varphi_1(z), \ldots, \varphi_{n-1}(z)$ *принадлежат пространству* A_R. *Для того чтобы система* $(\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})$ *была сильно цикличной для оператора* U^n, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\det \| z^{-q} (P_q^{(n)} \varphi_l)(z) \|_{l,q=0}^{n-1} \neq 0, \ \forall z : |z| < R.$$

Исходя из этого утверждения, можно проверить, например, что система (e^z, ze^z) сильно циклична для оператора U^2 в любом из пространств A_R, $0 < R \leqslant \infty$, а система (e^z, ze^{-z}) — лишь в тех A_R, для которых $0 < R \leqslant \pi/4$.

Как указывалось в работах [2, 9], некоторая матрица определяет линейный непрерывный оператор в пространстве A_R тогда и только тогда, когда ее транспонированная матрица определяет такой же оператор в $\overline{A}_{R^{-1}}$. Поскольку матрицы операторов U и Δ, $(\Delta f)(z) = [f(z) - f(0)]/z$ взаимно транспонированы, то аналоги полученных выше утверждений можно сформулировать и для уравнений вида $\Delta^m Y = \gamma Y \Delta$, $\gamma \in \mathbf{C}$; $m, n \in \mathbf{N}$, относительно оператора Y из класса $\mathfrak{L}(A_R)$ или $\mathfrak{L}(\overline{A}_R)$. Не останавливаясь на этом, мы лишь отметим, что такие утверждения обобщают некоторые результаты из [10], касающиеся описания коммутантов оператора Δ^n.

При изучении решений уравнений указанного типа очень часто оказывается, что матрица (в степенном базисе) искомого оператора является блочно-теплицевой [10], т. е. матрицей, элементы которой связаны соотношениями

$$t_{im+p,kn+q}=\begin{cases}t_{(i-k)m+p,q}, & i\geqslant k,\\ t_{p,(k-i)n+q}, & i\leqslant k,\end{cases} \tag{9}$$

$$i,k=0,1,\ldots;\quad 0\leqslant p\leqslant m-1;\quad 0\leqslant q\leqslant n-1.$$

Поэтому естественно возникает вопрос об условиях непрерывности в пространствах A_R и $\overline{A}_R$ операторов с такими матрицами в общем случае. Другими словами, интересным представляется нахождение некоторого (более простого) эквивалентна условий $\forall\rho<R\ \exists r<R$ и $\exists C\geqslant 0$ $(\forall r>R\ \exists\rho>R$ и $\exists C\geqslant 0)$

$$|t_{(i-k)m+p,q}|\leqslant C\,(r^{kn+q}/\rho^{im+p}),\quad i\geqslant k,$$

$$|t_{p,(k-i)n+q}|\leqslant C\,(r^{kn+q}/\rho^{im+p}),\ \ i\leqslant k,\ 0\leqslant p\leqslant m-1,\ 0\leqslant q\leqslant n-1.$$

С этой целью введем в рассмотрение (характеристические) функции $x_q(z)=\sum_{i=0}^{\infty}t_{i,q}z^i$, $0\leqslant q\leqslant n-1$, и $\tilde{x}_p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}t_{p,k}z^k$, $0\leqslant p\leqslant m-1$, и заметим, что этими функциями блочно-теплицева матрица с помощью соотношений (9) определяется полностью. Обычными методами доказывается следующее утверждение.

Утверждение. *Бесконечная матрица, элементы которой связаны соотношениями (9), определяет линейное и непрерывное отображение пространства A_R ($\overline{A}_R$) в себя тогда и только тогда, когда ее характеристические функции $x_q(z)$ принадлежат A_R, а $\tilde{x}_p(z)$ — пространству $\overline{A}_{R^{-1}}$ ($x_q(z)\in\overline{A}_R$, а $\tilde{x}_p(z)\in A_{R^{-1}}$).*

1. *Köthe G.* Dualität in der Funktionen theorie. — Journ. reine und angew. Math., 1953, 191, *29—49*.
2. *Хапланов М. Г.* Линейные преобразования аналитических пространств.— Докл. АН СССР, 1951, 80, 1, *21—24*.
3. *Нагнибида Н. И.* Операторы, перестановочные с операторами умножения на аналитические функции, и связанные с ними квазистепенные базисы.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1971, 13, *63—67*.
4. *Нагнибіда М. І.* Деякі ізоморфізми і квазістепеневі базиси простору аналітичних у крузі функцій — Доп. АН УРСР. Сер. А, 1975, 1, *29—31*.
5. *Ибрагимов И. И., Нагнибида Н. И.* Матричный метод и квазистепенные базисы в пространстве аналитических в круге функций.— Успехи мат. наук, 1975, 30, 6 (186), *101—146*.
6. *Касимов Э. И.* Об одной базисной системе. — Докл. АН СССР, 1973, 208, 5, *1023—1025*.
7. *Нагнибида Н. И.* Об одной общей схеме построения полных систем аналитических функций.— Укр. мат. журн., 1976, 28, 5, *681—685*.
8. *Crownover R. M., Hansen R. C.* Commutants of generalized integrations on a space of analytic functions.— Indiana Univ. Math. J., 1977, 26, 2, *233—245*.
9. *Березовский Н. И., Нагнибида Н. И.* О корнях из некоторых операторов в аналитических пространствах.— Укр. мат. журн., 1979, 31, 4, *351—356*.
11. *Иохвидов И. С.* Ганкелевы и теплицевы матрицы и формы. М.: Наука, 1974, *263*.

Черновицкий государственный университет

Поступила в редакцию 04.04.1980 г.