УДК 517.5

Ю. И. Мельник

О единственности разложения регулярных в выпуклых многоугольниках функций в ряды экспонент

Пусть M — выпуклая многоугольная область с вершинами в точках $a_1, \ldots, a_N$ $(N \geqslant 3)$, $0 \in M$, $\{\lambda_m\}_1^\infty$ — последовательность упорядоченных по возрастанию модулей нулей квазиполинома $L(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} d_k e^{a_k \lambda}$, $d_k \neq 0$, (для простоты предполагается, что все нули $L(\lambda)$ простые) и $f(z) \in E(M)$. Тогда [1]

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \omega_f(\lambda_m) \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} \quad (z \in M), \tag{1}$$

где

$$\omega_f(\lambda_m) = \lim_{r \uparrow 1} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{2/(r+1)}} \left\{ \int_0^t f(r(t-\eta)) e^{\lambda_m \eta} d\eta \right\} \gamma(t)\, dt,$$

$\gamma(t)$ — функция, ассоциированная по Борелю с $L(\lambda)$, $\Gamma_R = \{w : w = R \times \times z,\ z \in \partial \overline{M}\}$.

Здесь изучается единственность разложения (1). Отметим, что в отличие от аналогичной проблемы в теории тригонометрических рядов (см., например, [2, гл. VII]), в данном случае задача решается достаточно просто.

Пусть $\{c_m\}_1^\infty$ — произвольная последовательность комплексных чисел такая, что $|c_m| = e^{o(|\lambda_m|)}$. Тогда ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} \tag{1'}$$

сходится абсолютно в M и равномерно на компактах, лежащих внутри M. Этот факт немедленно следует из оценки

$$\left| \frac{e^{\lambda_m z \varkappa}}{L'(\lambda_m)} \right| \leqslant \text{const}\, e^{-a(1-\varkappa)|m|},\ 0 \leqslant \varkappa \leqslant 1,\ z \in \overline{M},\ 0 < a = \text{const}, \tag{2}$$

которая легко выводится из известных свойств квазиполинома [3, гл. I. § 2, п. 8].

Имеет место следующий результат.

Т е о р е м а. *Пусть*

$$c_m = o(1) \quad (m \to \infty) \tag{3}$$

и ряд (1′) *сходится к некоторой функции* $f(z)$, *причем* $f(z) \in E(M)$.

Тогда $c_m = \omega_f(\lambda_m)$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Дважды интегрируя тождество

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} \quad (z \in M), \tag{1''}$$

получаем

$$F(z) \stackrel{\text{df}}{=} \int_0^z du \int_0^u f(w)\, dw = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\lambda_m^2} \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} - \pi_1(z) \quad (z \in M), \tag{1'''}$$

где $\pi_1(z) = A + Bz$, $A = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\lambda_m^2} \frac{1}{L'(\lambda_m)}$, $B = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{c_m}{\lambda_m} \frac{1}{L'(\lambda_m)}$.

Из условия (3) и оценки (2) следует, что ряд ($1'''$) сходится абсолютно и равномерно в $\overline{M}$. Положим

$$F_n(z) = \sum_{m=1}^{n} \frac{c_m}{\lambda_m^2} \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)} \tag{4}$$

и обозначим через $\psi_k(z)$ функцию, ассоциированную по Борелю с $L(\lambda)/(\lambda-\lambda_k)$. Известно [3, гл. IV, § 1], что системы $\{e^{\lambda_m z}\}$ и $\{\psi_k(t)\}$ биортогональны. Имеем

$$\frac{c_k}{\lambda_k^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_C F_n(z)\,\psi_k(z)\,dz =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_C \left\{ \int_0^t F_n(t-\eta)\, e^{\lambda_k \eta}\, d\eta \right\} \gamma(t)\,dt = \sum_{p=1}^{N} d_p \int_{\gamma_{jp}} F_n(\zeta)\, e^{-\lambda_q^j(\zeta-\alpha_p)}\, d\zeta =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{p=1}^{N} d_p \int_{\gamma_{jp}} F_n(\zeta)\, e^{-\lambda_q^j(\zeta-a_p)} d\zeta = \sum_{p=1}^{N} d_p \int_{\gamma_{jp}} F(\zeta)\, e^{-\lambda_q^j(\zeta-a_p)} d\zeta +$$

$$+ \sum_{p=1}^{N} d_p \int_{\gamma_{jp}} \pi_1(\zeta)\, e^{-\lambda_q^j(\zeta-a_p)} d\zeta = \frac{1}{\lambda_k^2} \sum_{p=1}^{N} d_p \int_{\gamma_{jp}} f(\zeta)\, e^{-\lambda_q^j(\zeta-a_p)} d\zeta +$$

$$+ \frac{1}{\lambda_k^2} P_1(\lambda_k) = (\omega_f(\lambda_k) + P_1(\lambda_k)) \frac{1}{\lambda_k^2}, \tag{5}$$

где C — некоторый контур, охватывающий $\overline{M}$, $P_1(z)$ — некоторый многочлен первой степени. Первое равенство в (5) получаем, умножая тождество (4) на $\psi_k(z)$ ($k<n$) и интегрируя по C, в силу биортогональности систем $\{e^{\lambda_m z}\}$, $\{\psi_k(z)\}$; второе равенство представляет собой известное соотношение (см. [3, с. 236]); третье равенство — соотношение (4) из работы [1] (здесь мы используем обозначения работы [1], причем положено $\lambda_k = \lambda_q^j$); четвертое равенство справедливо в силу того, что c_k не зависит от n; пятое равенство справедливо в силу того, что, по доказанному ранее, $F_n(z) \to F(z) + \pi_1(z)$ ($n\to\infty$) равномерно в $\overline{M}$; чтобы получить шестое равенство, дважды интегрируем по частям первый интеграл, а второй вычисляем непосредственно; седьмое равенство справедливо в силу соотношения (4) из работы [1]. Из (5) следует, что $c_k = \omega_f(\lambda_k) + P_1(\lambda_k)$. Так как $\omega_f(\lambda_k) \to 0$ $k\to\infty$) [4] и $c_k \to 0$ ($k\to\infty$) по условию, то последнее равенство возможно только в том случае, когда $P_1(z) \equiv 0$, и тогда $c_k = \omega_f(\lambda_k)$. Теорема доказана.

Замечание 1. Условие (3), которое в теории тригонометрических рядов выводится на основании теоремы Кантора — Лебега [2, с. 133] из предположения о сходимости ряда на множестве положительной меры, в рассматриваемой ситуации представляется естественным, ибо никаких предположений о поведении ряда ($1'$) на $\partial\overline{M}$ не делается, а одно только требование, что $f(z) \in E(M)$, еще не влечет выполнения условия (3) $\Big($действительно, при $z \in M$, имеем [3, с. 291, 289] $0 = \sum_{m=1}^{\infty} 1 \cdot \frac{e^{\lambda_m z}}{L'(\lambda_m)}\Big)$. Впрочем, если ряд ($1'$) сходится на множестве $E = \bigcup_{j=1}^{N} E_j$, где E_j — некоторые множества положительной меры на сторонах $[a_j;\, a_{j+1}]$, то условие (3) выполняется; этот факт нетрудно вывести из соотношения (10) работы [1].

Замечание 2. Если условие (3) теоремы заменить более слабым условием $c_m = O(m^k)$ ($k \geqslant 0$ — целое), то разложение (1″) не будет единственным. Однако теми же средствами нетрудно доказать, что в этом случае $c_m = \omega_f(\lambda_m) + P_k(\lambda_m)$, где $P_k(z)$ — произвольный многочлен степени не выше k.

1. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами Дирихле в замкнутых выпуклых многоугольниках.— Укр. мат. журн., 1977, **29**, 6, *826—830*.
2. Харди Г. Х., Рогозинский В. В. Ряды Фурье. М.: Физматгиз, 1962. *156*.
3. Леонтьев А. Ф. Ряды экспонент. М.: Наука, 1976. *536*.
4. Мельник Ю. И. О представлении регулярных функций рядами типа рядов Дирихле.— В кн.: Исследования по теории приближения функций и их приложения. Киев, 1978. *132—141*.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
2.12.1980 г.