УДК 517.946:513.88

Фам Ки Ань

О структуре множества решений периодических граничных задач

Рассмотрим периодическую граничную задачу

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \quad x(0) = x(\omega), \tag{1}$$

где $A(t)$ при каждом t — линейный ограниченный оператор, действующий в банаховом пространстве E.

Пусть $A(t)$ непрерывно зависит от $t \in [0, \omega]$, а непрерывный оператор $f: [0, \omega] \times E \to E$ при каждом фиксированном t удовлетворяет условию Липшица по $x: \forall x, y \in E \ \| f(t, x) - f(t, y) \| \leqslant L(t) \| x - y \|$, где $L(t)$ — некоторая положительная, непрерывная на отрезке $[0, \omega]$ функция. Обозначим $U(t)$ решение задачи Коши $dU/dt = A(t)U$, $U(0) = I$. Здесь I — единичный оператор в E и оператор $[I - U(\omega)]$ имеет непрерывный обратный.

Через $\mathfrak{R} \subset C([0, \omega], E)$ обозначено множество решений задачи (1), а $\mathfrak{R}_0$ — множество неподвижных точек оператора,

$$F(c) = [I - U(\omega)]^{-1} U(\omega) \int_0^\omega U^{-1}(s) f(s, x(sc))\, ds, \tag{2}$$

где интеграл понимается по Бохнеру, а $x(t, c)$ — решение следующей задачи Коши:

$$dx/dt = A(t)x + f(t, x), \quad x(0) = c. \tag{3}$$

Очевидно, $x \in \mathfrak{R}$ тогда и только тогда, когда его значение в нуле $x(0)$ принадлежит $\mathfrak{R}_0$.

Пусть $\sup\limits_{t\in[0,\omega]} \| U(t) \| \leqslant k_1$, $\| [I - U(\omega)]^{-1} U(\omega) \| \leqslant k_2$ и $h(t) = \int\limits_0^t k_1 L(s) \times \times \| U^{-1}(s) \| ds$. В пространстве $C([0, \omega], E)$ вводится норма $\| x \| = \sup\limits_{t\in[0,\omega]} e^{-h(t)} \| x, t \|$.

Легко убедиться, что, как и в конечномерном случае [1], при сделанных выше предположениях задача Коши (3) имеет единственное, удовлетворяющее условию Липшица по c, решение:

$$\| x(\cdot, c_1) - x(\cdot, c_2) \|_h \leqslant k_1 e^{h(\omega)} \| c_1 - c_2 \|. \tag{4}$$

Оператор $F(c)$, определенный по формуле (2), удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом $q = k_2 e^{h(\omega)} (e^{h(\omega)} - 1)$. Поэтому, если $q < 1$, то в силу теоремы Банаха о сжимающих отображениях множество $\mathfrak{R}$ состоит из единственной точки.

Определение. Подмножество $\mathfrak{M}$ банахова пространства X назовем связным множеством, если для любых точек $x_1, x_2 \in \mathfrak{M}$ найдется такое непрерывное отображение $\varphi : [0, 1] \to \mathfrak{M}$, что $\varphi(0) = x_1$, $\varphi(1) = x_2$. Более того, при любом разбиении отрезка $[0, 1]$,

$$\Pi = \{0 = s_0 < s_1 < \ldots < s_n = 1\}, \tag{5}$$

имеем $\sum\limits_{i=0}^{n-1} \| \varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i) \|_h \leqslant \text{const}$.

Теорема 1. *Пусть пространство E строго выпукло и $q = k_2 e^{h(\omega)} \times \times (e^{h(\omega)} - 1) \leqslant 1$. Тогда имеет место альтернатива: либо задача* (1) *не имеет решений, либо множество всех ее решений спрямляемо связно в* $C([0, \omega], E)$.

Доказательство. Теорема верна в случае, когда $\mathfrak{R}$ состоит из одной точки. Допустим, $\mathfrak{R}$ состоит из не менее двух точек. Поскольку пространство E строго выпукло, а оператор $F : E \to E$ — нерастягивающийся, то [2] множество его неподвижных точек $\mathfrak{R}_0$ выпукло. Пусть $x_0, x_1 \in \mathfrak{R}$. Положив $c_0 = x_0(0)$, $c_1 = x_1(0)$, имеем $c_0, c_1 \in \mathfrak{R}_0$, но тогда и $c_1 = (1-s)c_0 + sc_1 \in \mathfrak{R}_0$ $(s \in [0, 1])$. Рассмотрим отображение $\varphi : [0, 1] \to C([0, \omega] E)$, ставящее в соответствие каждому числу $s \in [0, 1]$ решение задачи Коши (3) с начальным условием $c_s \in \mathfrak{R}_0$: $\varphi(s) = x(\cdot, c_s)$ $(s \in [0, 1])$.

Тогда $\varphi(s) \in \mathfrak{R}$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$. В силу единственности решения задачи Коши (3), $\varphi(0) = x_0$, $\varphi(1) = x_1$. Далее, согласно (4), для всех $s, s' \in [0, 1] \times \times \| \varphi(s) - \varphi(s') \|_h \leqslant k_1 e^{h(\omega)} \| c_s - c_{s'} \| = k_1 e^{h(\omega)} | s - s' | \| c_1 - c_0 \|$. Отсюда следует непрерывность отображения φ.

Рассмотрим произвольное разбиение (5). Имеем

$$\sum_{i=0}^{n-1} \| \varphi(s_{i+1}) - \varphi(s_i) \|_h \leqslant k_1 e^{h(\omega)} \| c_1 - c_0 \|.$$

Таким образом, $\varphi(s)$ — искомый спрямляемый путь, соединяющий заданные точки $x_0, x_1 \in \mathfrak{R}$, целиком лежащий в $\mathfrak{R}$. Теорема доказана.

Откажемся от предположения о строгой выпуклости пространства E. Имеет место следующее утверждение, представляющее также самостоятельный интерес (встречающиеся здесь понятия заимствованы из [2—4]).

Лемма. *Пусть E — линейное нормированное пространство, C — замкнутое выпуклое ограниченное подмножество E, $F : C \to C$ — нерастягивающий оператор и выполнено одно из следующих условий: 1) F — демикомпактен в нуле; 2) $I - F$ — отображает каждое замкнутое ограниченное подмножество множества C в замкнутое ограниченное подмножество; 3) F — уплотняющий оператор по мере некомпактности Куратовского.*

Тогда множество $\mathfrak{R}_0$ неподвижных точек оператора F не пусто и спрямляемо связно.

Доказательство. Рассмотрим оператор $F_\lambda = (1-\lambda) I + \lambda F$, где $\lambda \in (0, 1)$ — некоторое фиксированное число. По теореме 3 [4] множество $\mathfrak{R}_0$ не пусто и для всякого $u_0 \in C$, последовательность $F_\lambda^n u_0$ сходится к некоторой точке $c_0 \in \mathfrak{R}_0$. Пусть $c_0, c_1 \in \mathfrak{R}_0$, в силу выпуклости множества $Cp(s) = (1-s) c_0 + sc_1 \in C$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$.

Положим $c(s) = \lim\limits_{n\to\infty} F_\lambda^n p(s)$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$. Имеем $c(s) \in \mathfrak{R}_0$ $(0 \leqslant s \leqslant 1)$ и $c(0) = c_0$, $c(1) = c_1$.

Поскольку оператор F, и, следовательно, оператор F_λ нерастягивающие, то для любых $s, s' \in [0, 1]$

$$\| c(s) - c(s') \| \leqslant \| c(s) - F_\lambda^n p(s) \| F_\lambda^n p(s) - F_\lambda^n p(s') \| + \| F_\lambda^n p(s') - c(s') \| \leqslant$$
$$\leqslant \| c(s) - F_\lambda^n p(s) \| + \| p(s) - p(s') \| + \| F_\lambda^n p(s') - c(s') \|.$$

Устремив n к бесконечности, получим

$$\| c(s) - c(s') \| \leqslant \| p(s) - p(s') \| = | s - s' | \| c_0 - c_1 \|. \tag{6}$$

Тем самым $c(s)$ — искомый спрямляемый путь, соединяющий $c_0, c_1 \in \mathfrak{R}_0$ и целиком лежащий в $\mathfrak{R}_0$. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия:*

а) $q = k_2 e^{h(\omega)} (e^{h(\omega)} - 1) \leqslant 1$; *б)* $\forall t \in [0, \omega]$, $\forall x \in E$ $\| f(t, x) \| \leqslant a(t) + b \| x \|^\alpha$, (7)

где $a(t)$ — *непрерывная неотрицательная функция,* $b > 0$, $\alpha \in [0, 1]$ — *некоторые числа, причем, если* $\alpha = 1$, *то* $b < \left\{ k_1 k_2 e^{h(\omega)} \int\limits_0^\omega \| U^{-1}(s) \| \, ds \right\}^{-1}$.

б) *Оператор* $f : [0, \omega] \times E \to E$ *вполне непрерывен.*

Тогда множество $\mathfrak{R}$ *всех решений задачи* (1) *не пусто и спрямляемо связно в* $C([0, \omega], E)$.

Доказательство. Используя тождество (2) и условие (7), получаем $\| F(c) \| \leqslant k_2 \int\limits_0^\omega \| U^{-1}(s) \| (a(s) + b \| x(s, c) \|^\alpha) \, \mathrm{ds}$. С другой стороны, в силу (4)

$$\| x(\cdot, c) \|_h \leqslant \| x(\cdot, 0) \|_h + k_1 e^{h(\omega)} \| c \|, \tag{8}$$

поэтому

$$\frac{\| F(c) \|}{\| c \|} \leqslant \frac{k_2}{\| c \|} \int\limits_0^\infty \| U^{-1}(s) \| a(s) \, \mathrm{ds} + \frac{k_2 b}{\| c \|^{1-\alpha}} \int\limits_0^\omega \| U^{-1}(s) \| \times$$
$$\times \left\{ \frac{\| x(\cdot, 0) \|_h}{\| c \|} + k_1 e^{h(\omega)} \right\}^\alpha \mathrm{ds}. \tag{9}$$

Из (9) следует, что оператор F оставляет инвариантным шар $C = \{c \in E : \| c \| \leqslant R\}$ достаточно большого радиуса R. При этом R можно выбрать настолько большим, что множество $\mathfrak{R}_0$ всех неподвижных точек оператора F, если оно не пусто, целиком лежит в C. В силу (8), множество всех решений задачи (3) с начальными условиями $c \in C$ ограничено в $C([0, \omega], E)$. Согласно условию б) оператор $U^{-1}(s) f(s, x)$ $(s \in [0, \omega], \quad x \in E)$ вполне непрерывен. Поэтому [5], интегральный оператор $\int\limits_0^t U^{-1}(s) f(s, x(s)) \, \mathrm{ds}$ вполне непрерывен в $C([0, \omega], E)$. Отсюда следует, что оператор $F(c)$ компактен в E и демикомпактен в нуле. Согласно доказанной выше лемме, множество $\mathfrak{R}_0$ не пусто, поэтому множество $\mathfrak{R}$ не пусто также.

Пусть $x_0, x_1 \in \mathfrak{R}_0$. Положив $c_0 = x_0(0)$, $c_1 = x_1(0)$ имеем $c_0, c_1 \in \mathfrak{R}_0$. Лемма доказывает существование такого непрерывного отображения $c : [0, 1] \to \mathfrak{R}_0$, что $c(0) = c_0$, $c(1) = c_1$, и выполнение условия (6).

Рассмотрим отображение $\varphi:[0, 1] \to \mathfrak{R}$, ставящее в соответствие каждому числу $s \in [0, 1]$ решение задачи Коши (3) с начальным условием $c(s) \in \mathfrak{R}_0$: $\varphi(s) = x(\cdot, c(s))$.

В силу единственности решения задачи (3) $\varphi(0) = x_0$ и $\varphi(1) = x_1$. Кроме того, для любых $s, s' \in [0, 1]$

$$\| \varphi(s) - \varphi(s') \|_h \leqslant k_1 e^{h(\omega)} \| c(s) - c(s') \| \leqslant k_1 e^{h(\omega)} | s - s' | \| c_0 - c_1 \|.$$

Отсюда непосредственно следует непрерывность и спрямляемость пути $\varphi(s)$ $(s \in [0, \omega])$ Теорема доказана.

Следствие. *Пусть пространство E равномерно выпукло, $q = k_2 e^{h(\omega)} (e^{h(\omega)} - 1) \leqslant 1$ и имеет место оценка* (7).

Тогда множество всех решений задачи (1) *не пусто и спрямляемо связно в* $C([0, \omega], E)$.

Доказательство. Из доказательства теоремы 2 следует, что оператор F оставляет инвариантным шар $C = \{c \in F : \| c \| \leqslant R\}$ достаточно большого радиуса R. Следовательно (см. [3]), в силу равномерной выпуклости пространства E, множество всех неподвижных точек оператора F, лежащих в C, не пусто. Поскольку пространство E равномерно выпукло, то оно и подавно строго выпукло и по теореме 1 множество всех решений задачи [1] спрямляемо связно в $C([0, \omega], E)$.

1. Schneider K. R. On the existence and numerial approximation of forced oscillations.— Z. angew. Math. Mech. 1979. 59, *739—741*.
2. Petryshyn W. V., Williams J. R. Strong and weak convergence of the sequense approximations for quasinonexpansive mappings.— J. Math and Appl. 1973, 43, 2, *458—497*.
3. Красносельский М. А., Забрейко П. П. Геометрические методы нелинейного анализа. М.: Наука, 1975, *510*.
4. Edelstein M., O'Brien R. Nonexpansive mappingsasimptotic regularity and successive approximations.— J. London Math. Soc. 1978, 17, 3, *547—554*.
5. Красносельский М. А., Крейн С. Г. К теории обыкновенных дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. — Тр. Воронеж. ун-та. 1956, 2, *3—23*.

Воронежский
лесотехнический институт

Поступила в редакцию
20.07.1980 г.