УДК 517.942.932+517.984

И. С. Кац

Теорема об интегральных оценках роста спектральных функций струны

Пусть I — интервал $[0, L]$ с $0 < L < +\infty$ или интервал $[0, L)$ с $0 < L \leqslant +\infty$. Пусть $M(x)$, $M(0) = 0$,— неубывающая конечная на I функция, а $Q(x)$, $x \in I$,— вещественная функция, имеющая ограниченное изменение на любом интервале $[0, l]$ с $l \in I$. Рассмотрим граничную задачу

$$-\frac{d}{dM(x)}\left[y^-(x) - \int\limits_{-0}^{x-0} y(s)\,dQ(s)\right] - \lambda y(x) = 0, \quad x \in I; \tag{1}$$

$$y^-(0) = m, \; y(0) = n, \tag{2}$$

где m и n — вещественные числа, $|m| + |n| \neq 0$; $y^-(x)$, $x \in I$, $x \neq 0$,— левая производная функции $y(x)$, $y^-(0)$ — присоединенное значение (необходимые определения см. в работах [1, 2]).

Рост при $\lambda \to +\infty$ спектральных функций граничной задачи (1), (2) изучался рядом авторов (см. [6, 5, 2, 3]). В работах [2, 3] результаты устанавливались сначала для регулярной струны $S_1[0, l]$ (граничной задачи (1), (2) с $I = [0, l]$, $l < +\infty$, $Q(x) = \text{const}$, $n = 1$, $m = 0$, см. [4]), имеющей тяжелые концы ($x = 0$ и $x = l$ — точки роста функции $M(x)$, см. [2, 3]), а затем переносились на граничную задачу (1), (2). Основной результат настоящей статьи — следующая теорема.

Теорема. *Пусть $\tau(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$,— какая-либо спектральная функция регулярной струны $S_1[0, l]$ с тяжелыми концами, $M(x)$, $0 \leqslant x \leqslant l$,— функция распределения ее масс, нормированная условием $M(0) = 0$, а $U(x)$ — функция, определенная равенством*

$$U(x) = \int\limits_0^x M(s)\,ds, \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \tag{3}$$

Пусть $\xi(\lambda)$ — какая-либо функция, не убывающая и положительная на $[k, +\infty)$, где $k > 0$. Тогда хотя бы для одного $b \in (0, l]$ (следовательно, для любого) такого, что $U(b) < k^{-1}$,

$$\int\limits_k^{+\infty} \xi(\lambda)\frac{\tau(\lambda)}{\lambda^2}\,d\lambda \diamondsuit \int\limits_0^b \xi\left(\frac{1}{U(x)}\right) dx. \tag{4}$$

Символ $\diamondsuit$, поставленный между двумя интегралами Стилтьеса (вообще говоря, несобственными) от неотрицательных функций по неубывающим функциям, означает, что первый из этих интегралов конечен в том и только том случае, когда конечен второй.

С помощью приемов, использованных в [2], утверждение теоремы переносится на любую струну S_1 (возможно, сингулярную, см. [4]) с тяжелым регулярным левым концом $x = 0$, а в том частном случае, когда $\xi(2\lambda) = O(\xi(\lambda))$ при $\lambda \to +\infty$, и на граничные задачи (1), (2), у которых $n \neq 0$. Этим значительно обобщается теорема A из работы [2].

Вспомогательные предложения теории функций.

Лемма 1. *Если* $\omega(x) \geqslant 0$ — *функция, не убывающая на* $(a_0, +\infty)$, *а* $\rho(x) \geqslant 0$ — *не возрастающая на том же интервале функция, причем* $\lim\limits_{x\to+\infty} \rho(x) = 0$ *и хотя бы одна из функций* $\omega(x)$ *и* $\rho(x)$ *непрерывна на* $(a_0, +\infty)$, *то для* $a > a_0$

$$\int\limits_{a-0}^{+\infty} \rho(x)\, d\omega(x) \diamondsuit \int\limits_{a-0}^{+\infty} \omega(x)\, d(-\rho(x)). \tag{5}$$

В случае сходимости интегралов в (5)

$$\int\limits_{a-0}^{+\infty} \rho(x)\, d\omega(x) = -\rho(a-0)\,\omega(a-0) + \int\limits_{a-0}^{+\infty} \omega(x)\, d(-\rho(x)).$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2 из [1].

Лемма 2. *Если* $\sigma(\lambda)$ — *не убывающая на* $(-\varepsilon, +\infty)$, $\varepsilon > 0$, *функция и сходится интеграл* $\int\limits_{1-0}^{+\infty} \lambda^{-1} d\sigma(\lambda)$, *то при любом* $z > 0$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{z}^{+\infty} \frac{\sigma(\lambda)-\sigma(-0)}{\lambda^2}\, d\lambda \leqslant \int\limits_{-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+z} \leqslant \int\limits_{z}^{+\infty} \frac{\sigma(\lambda)-\sigma(-0)}{\lambda^2}\, d\lambda. \tag{6}$$

Доказательство. При любом $z > 0$

$$\int\limits_{-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+z} = \int\limits_{-0}^{z-0} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+z} + \int\limits_{z-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+z}. \tag{7}$$

Очевидно, при таких z

$$\frac{1}{2z}\int\limits_{-0}^{z-0} d\sigma(\lambda) \leqslant \int\limits_{-0}^{z-0} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+z} \leqslant \frac{1}{z}\int\limits_{-0}^{z-0} d\sigma(\lambda); \tag{8}$$

$$\frac{1}{2}\int\limits_{z-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda} \leqslant \int\limits_{z-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda+z} \leqslant \int\limits_{z-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda}. \tag{9}$$

Так как интегралы в крайних частях (8) равны $\sigma(z-0)-\sigma(-0)$ и согласно лемме 1

$$\int\limits_{z-0}^{+\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{\lambda} = \int\limits_{z-0}^{+\infty} \frac{d(\sigma(\lambda)-\sigma(-0))}{\lambda} = -\frac{\sigma(z-0)-\sigma(-0)}{z} + \int\limits_{z-0}^{+\infty} \frac{\sigma(\lambda)-\sigma(-0)}{\lambda^2}\, d\lambda,$$

то из (7) — (9) следует (6).

Лемма 3. *Если* $\rho(\lambda)$ — *не убывающая на* $(-\infty, +\infty)$ *функция такая, что сходится интеграл*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{1+\lambda^2}, \tag{10}$$

то при любом $y > 0$

$$\int\limits_{y}^{+\infty} \lambda^{-3}\tilde{\rho}(\lambda)\, d\lambda \leqslant \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2+y^2} \leqslant 2\int\limits_{y}^{+\infty} \lambda^{-3}\tilde{\rho}(\lambda)\, d\lambda, \tag{11}$$

где $\tilde{\rho}(\lambda) = \rho(\lambda) - \rho(-\lambda)$ *при* $\lambda > 0$.

Доказательство. При любом $y > 0$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} = \int_{-\infty}^{-y+0} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} + \int_{-y+0}^{y-0} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} + \int_{y-0}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2 + y^2}. \tag{12}$$

Очевидно, при таких y

$$\frac{1}{2y^2} \int_{-y+0}^{y-0} d\rho(\lambda) \leqslant \int_{-y+0}^{y-0} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} \leqslant \frac{1}{y^2} \int_{-y+0}^{y-0} d\rho(\lambda); \tag{13}$$

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{-y+0} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} \leqslant \int_{-\infty}^{-y+0} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} \leqslant \int_{-\infty}^{-y+0} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2}; \tag{14}$$

$$\frac{1}{2} \int_{y-0}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} \leqslant \int_{y-0}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2 + y^2} \leqslant \int_{y-0}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2}. \tag{15}$$

Так как согласно лемме 1

$$\int_{y-0}^{+\infty} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} = -\frac{\rho(y-0)}{y^2} + 2\int_{y}^{+\infty} \frac{\rho(\lambda)}{\lambda^3}\, d\lambda; \tag{16}$$

$$\int_{-\infty}^{-y+0} \frac{d\rho(\lambda)}{\lambda^2} = \int_{y-0}^{+\infty} \frac{d(-\rho(-\lambda))}{\lambda^2} = \frac{\rho(-y+0)}{y^2} - 2\int_{y}^{+\infty} \frac{\rho(-\lambda)}{\lambda^3}\, d\lambda \tag{17}$$

и интеграл в крайних частях (13) равен $\rho(y-0) - \rho(-y+0)$, то из (12)—(15) следует (11).

Как и в работе [4], функцию $f(z)$ комплексного переменного относим к классу (R) и называем R-функцией, если: 1) она определена и голоморфна в полуплоскостях $\operatorname{Im} z > 0$ и $\operatorname{Im} z < 0$; 2) $\overline{f(z)} = f(\overline{z})$, $\operatorname{Im} z \neq 0$; 3) $\operatorname{Im} z \times \operatorname{Im} f(z) \geqslant 0$, $\operatorname{Im} z \neq 0$. Любая $f(\cdot) \in (R)$ представима в виде

$$f(z) = \alpha + \beta z + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{\lambda - z} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\tau(\lambda), \quad \operatorname{Im} z \neq 0, \tag{18}$$

где $\beta \geqslant 0$, $\operatorname{Im} \alpha = 0$, а $\tau(\lambda)$ — такая неубывающая функция, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{1 + \lambda^2} < \infty. \tag{19}$$

Функцию $\tau(\lambda)$ из (18), нормированную условиями

$$\tau(\lambda) = 0{,}5\,(\tau(\lambda - 0) + \tau(\lambda + 0)), \ -\infty < \lambda < +\infty, \ \tau(0) = 0, \tag{20}$$

называют спектральной функцией R-функции $f(z)$. Она, как и константы $\alpha = \alpha_f$, $\beta = \beta_f$, однозначно определяется R-функцией $f(z)$.

Лемма 4. *Если $\tau(\lambda)$ — спектральная функция R-функции $f(z)$ с $\beta_f = 0$, а $\mu(t)$ положительна и не убывает на $[k, +\infty)$, где $k > 0$, то*

$$\int_{k-0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y}\, d\mu(y) \diamond \int_{k}^{+\infty} \frac{\mu(\lambda)\, \tilde{\tau}(\lambda)}{\lambda^3}\, d\lambda, \tag{21}$$

где

$$\tilde{\tau}(\lambda) = \tau(\lambda) - \tau(-\lambda), \ \lambda > 0. \tag{22}$$

Доказательство. Так как $\beta = \beta_f = 0$, то согласно (18) при $y > 0$

$$\frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau(\lambda)}{\lambda^2 + y^2}. \tag{23}$$

Из (23) и леммы 3 следует, что

$$\int_{k-0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f(iy)}{y} d\mu(y) \diamond \int_{k-0}^{+\infty} \left(\int_{y}^{+\infty} \frac{\tilde{\tau}(\lambda)}{\lambda^3} d\lambda \right) d\mu(y). \tag{24}$$

Согласно лемме 1

$$\int_{k-0}^{+\infty} \left(\int_{y}^{+\infty} \frac{\tilde{\tau}(\lambda)}{\lambda^3} d\lambda \right) d\mu(y) \diamond \int_{k-0}^{+\infty} \frac{\mu(\lambda)\tilde{\tau}(\lambda)}{\lambda^3} d\lambda. \tag{25}$$

Поэтому из (24) вытекает (21).

Вспомогательные предложения теории струны. Спектральная функция $\tau(\lambda)$ регулярной струны $S_1[0, l]$ с тяжелыми концами по определению [4] является не убывающей на R-функцией, нормированной условиями (20). Ее спектром $\sigma[\tau]$ называем множество ее точек роста. У струны $S_1[0, l]$ существуют спектральные функции $\tau(\lambda)$ с неотрицательным спектром [4].

Функция $U(x)$, определенная равенством (3) на $[0, l]$ абсолютно непрерывна и монотонно возрастает на $[0, l]$, причем $U(0) = 0$. Через $X(z)$ обозначим функцию, однозначно определяемую на $[(U(l))^{-1}, +\infty)$ равенством

$$X((U(x))^{-1}) = x, \quad 0 < x \leqslant l. \tag{26}$$

Она монотонно убывает и непрерывна; $X(z) \to 0$ при $z \to +\infty$.

Лемма 5. *Пусть $\tau_*(\lambda)$ — спектральная функция струны $S_1^-[0, l]$, имеющая неотрицательный спектр. Тогда справедливы неравенства*

$$\frac{1}{4} X(z) \leqslant \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau_*(\lambda)}{\lambda + z} \leqslant 2X(z), \ \forall z > \left(U\left(\frac{l}{2}\right)\right)^{-1}. \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $v(x) = (xM(x))^{-1}$, $0 < x < l$. Ясно, что $v(x)$ монотонно убывает на $(0, l)$, причем $v(x) \to k_0 = v(l - 0)$ при $x \to l - 0$ и $v(x) \to +\infty$ при $x \to +0$. Поэтому для каждого $z \in (k_0, +\infty)$ однозначно определяется $\chi(z) \in (0, l)$, удовлетворяющее неравенствам $v(\chi(z) + 0) \leqslant z \leqslant v\chi(z) - 0))$. Из данного здесь определения функции $\chi(z)$ следует, что $(z\chi(z))^{-1} \in [M(\chi(z) - 0), M(\chi(z) + 0)]$, $Az > k_0$.

В [3] было установлено, что для любых $z > 0$, $x \in (0, l)$ справедливы неравенства

$$\frac{1}{zM(x) + x^{-1}} \leqslant \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau_*(\lambda)}{\lambda + z} \leqslant x + \frac{1}{zM(x)}, \tag{28}$$

и они остаются справедливыми, если $M(x)$ заменить любым числом из $[M(x - 0), M(x + 0)]$. Поэтому, взяв в (28) $x = \chi(z)$ и заменив $M(x) = M(\chi(z))$ на $(z\chi(z))^{-1}$, получим

$$\frac{1}{2}\chi(z) \leqslant \int_{-0}^{+\infty} \frac{d\tau_*(\lambda)}{\lambda + z} \leqslant 2\chi(z), \quad \forall z > k_0. \tag{29}$$

Так как $M(x)$ не убывает на $[0, l]$, то из (3) вытекает, что $U(x) \leqslant xM(x) = 1/v(x)$, $x \in (0, l)$ и

$$U(2x) = \int_0^{2x} M(s)\,ds \geqslant \int_x^{2x} M(s)\,ds \geqslant M(x)\,x = \frac{1}{v(x)}, \quad x \in \left(0, \frac{l}{2}\right). \tag{30}$$

Таким образом,

$$(U(2x))^{-1} \leqslant v(x) = (xM(x))^{-1} \leqslant (U(x))^{-1}, \quad x \in (0, l/2). \tag{31}$$

Так как функции $(U(2x))^{-1}$, $v(x)$, $(U(x))^{-1}$ монотонно убывают, на $(0, l/2)$ и стремятся к $+\infty$ при $x \to +0$, то из (31) и определений функций $\chi(z)$ и $X(z)$ следует, что

$$0{,}5X(z) \leqslant \chi(z) \leqslant X(z), \quad \forall z > (U(l/2))^{-1}. \tag{32}$$

Так как $U(l/2) \leqslant lM(l-0) = 1/k_0$, то из (29) и (32) вытекает (27).

Лемма 6. *Если $\tau_*(\lambda)$ — спектральная функция струны $S_1[0, l]$, имеющая неотрицательный спектр, а $\xi(\lambda)$ — положительная функция, не убывающая на $[k, +\infty)$, где $k > 0$, то для хотя бы одного, а следовательно, любого $b \in (0, l)$ такого, что $(U(b))^{-1} > k$,*

$$\int_0^b \xi\left(\frac{1}{U(x)}\right) dx \diamond \int_k^{+\infty} \xi(\lambda)\,\frac{\tau_*(\lambda) - \tau_*(-0)}{\lambda^2}\,d\lambda. \tag{33}$$

Доказательство. Из лемм 2 и 5 следует, что при $z > (U(l/2))^{-1}$

$$\frac{1}{4}X(z) \leqslant \int_z^{+\infty} \frac{\tau_*(\lambda) - \tau_*(-0)}{\lambda^2}\,d\lambda \leqslant 4X(z). \tag{34}$$

Выберем $b \in (0, l/2)$ таким, чтобы $(U(b))^{-1} > k$ (напомним, что $U(x) \to +0$ при $x \to +0$). Так как $\xi(\lambda)$ не убывает на $[k, +\infty)$ то из (34) следует, что

$$\int_{(U(b))^{-1}}^{+\infty} X(z)\,d\xi(z) \diamond \int_{(U(b))^{-1}}^{+\infty} \left(\int_z^{+\infty} \frac{(\tau_*(\lambda) - \tau_*(-0)}{\lambda^2}\,d\lambda\right) d\xi(z). \tag{35}$$

Согласно лемме 1

$$\int_{(U(b))^{-1}}^{+\infty} X(z)\,d\xi(z) \diamond \int_{(U(b))^{-1}}^{+\infty} \xi(z)\,d(-X(z)). \tag{36}$$

Так как функция $1/U(x)$ непрерывна на $(0, l)$, монотонно убывает и отображает $(0, b]$ на $[(U(b))^{-1}, +\infty)$, то, используя (26), получаем с помощью подстановки $z = 1/U(x)$

$$\int_{(U(b))^{-1}}^{+\infty} \xi(z)\,d(-X(z)) = \int_0^b \xi\left(\frac{1}{U(x)}\right) dx. \tag{37}$$

Далее, согласно лемме 1

$$\int_{(U(b))^{-1}}^{+\infty} \left(\int_z^{+\infty} \frac{\tau_*(\lambda) - \tau_*(-0)}{\lambda^2}\,d\lambda\right) d\xi(\lambda) \diamond \int_{(U(b))^{-1}}^{+\infty} \xi(\lambda)\,\frac{\tau_*(\lambda) - \tau_*(-0)}{\lambda^2}\,d\lambda. \tag{38}$$

Так как $(U(b))^{-1} > k$ и подынтегральная функция в правой части (33) ограничена на интервале $[k, (U(b))^{-1}]$, то из (37), (36), (35) и (38) следует (33).

Лемма 7. *Пусть* $\tau_1(\lambda)$ *и* $\tau_2(\lambda)$ — *две спектральные функции струны* $S_1[0, l]$, *а* $\xi(\lambda)$ — *положительная функция, не убывающая на интервале* $[k, +\infty)$, $k > 0$, *такая, что*

$$\int_k^{+\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda < \infty. \tag{39}$$

Тогда

$$\int_k^{+\infty} \frac{\tilde{\tau}_1(\lambda)}{\lambda^2} \xi(\lambda) d\lambda \diamond \int_k^{+\infty} \frac{\tilde{\tau}_2(\lambda)}{\lambda^2} \xi(\lambda) d\lambda, \tag{40}$$

где $\tilde{\tau}_j(\lambda) = \tau_j(\lambda) - \tau_j(-\lambda)$, $j = 1, 2$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\mu(\lambda) = \lambda\xi(\lambda)$, $\lambda > k$. Она положительна, не убывает и (см. (39))

$$\int_k^{+\infty} \frac{\mu(\lambda)}{\lambda^3} d\lambda < \infty. \tag{41}$$

Согласно лемме 1

$$\int_k^{+\infty} \frac{d\mu(\lambda)}{\lambda^2} < \infty. \tag{42}$$

Как уже отмечалось в работе [2], R-функции

$$f_1(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau_1(\lambda)}{\lambda - z}, \qquad f_2(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\tau_2(\lambda)}{\lambda - z}, \quad \operatorname{Im} z \neq 0 \tag{43}$$

со спектральными функциями $\tau_1(\lambda)$ и $\tau_2(\lambda)$ таковы, что $|f_1(iy) - f_2(iy)| = O(1/y)$ при $y \to +\infty$. Поэтому из (42) вытекает, что

$$\int_{k-0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f_1(iy)}{y} d\mu(y) \diamond \int_{k-0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f_2(iy)}{y} d\mu(y). \tag{44}$$

В силу леммы 4 при $j = 1, 2$

$$\int_{k-0}^{+\infty} \frac{\operatorname{Im} f_j(iy)}{y} d\mu(y) \diamond \int_k^{+\infty} \frac{\mu(\lambda)\tilde{\tau}_j(\lambda)}{\lambda^3} d\lambda = \int_k^{+\infty} \frac{\xi(\lambda)\tau_j(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda. \tag{45}$$

Из (44) и (45) следует (40).

Доказательство теоремы. Пусть $\tau(\lambda)$ — какая-либо спектральная функция струны $S[0, l]$ и $b \in (0, l)$ таково, что $(U(b))^{-1} > k$.

Если $\xi(\lambda)$ не удовлетворяет условию (39), то (4) справедливо, ибо оба интеграла в (4) расходятся. Для интеграла в левой части (4) это вытекает из того, что $\tau(\lambda) \geqslant c > 0$ при достаточно больших λ [6]. Интеграл же в правой части (4) (см. (31))

$$\int_0^b \xi\left(\frac{1}{U(x)}\right) dx \geqslant \int_0^b \xi\left(\frac{1}{xM(b)}\right) dx = \frac{1}{M(b)} \int_{(bM(b))^{-1}}^{+\infty} \frac{\xi(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda = \infty.$$

Пусть теперь $\xi(\lambda)$ удовлетворяет условию (39). Так как $\tau(\lambda)$ ограничена на отрицательной полуоси [4], то

$$\int_k^{+\infty} \xi(\lambda) \frac{\tau(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda \diamond \int_k^{+\infty} \xi(\lambda) \frac{\tilde{\tau}(\lambda)}{\lambda^2} d\lambda, \tag{46}$$

где $\tilde{\tau}(\lambda) = \tau(\lambda) - \tau(-\lambda)$. Выберем какую-нибудь спектральную функцию $\tau_*(\lambda)$ струны $S_1[0, l]$, имеющую неотрицательный спектр.

Функция $\tilde{\tau}_*(\lambda) = \tau_*(\lambda) - \tau_*(-\lambda)$ при $\lambda > 0$ совпадает с $\tau_*(\lambda) - \tau_*(-0)$. Поэтому из (46) и лемм 6 и 7 вытекает (4). Теорема доказана.

Отметим в заключение, что теорема остается справедливой, если $U(x)$ заменить функцией $u(x) = xM(x)$. Это легко установить с помощью неравенств (31).

1. *Кац И. С.* Существование спектральных функций обобщенных дифференциальных систем второго порядка с граничными условиями в сингулярном конце.— Мат. сб., 1965, **68**, № 2, с. 174—227.
2. *Кац И. С.* Интегральные характеристики роста спектральных функций обобщенных граничных задач второго порядка с граничными условиями в регулярном конце.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1971, **35**, № 1, с. 154—184.
3. *Кац И. С.* Обобщение асимптотической формулы В. А. Марченко для спектральной функции граничной задачи второго порядка.— Изв. АН СССР. Сер. мат., 1973, **37**, № 2, с. 422—436.
4. *Аткинсон Ф.* Дискретные и непрерывные граничные задачи.— М.: Мир, 1968. Доп.: *Кац И. С.*, *Крейн М. Г.* R-функции — аналитические функции, отображающие верхнюю полуплоскость в себя. О спектральных функциях струны, с. 628—737.
5. *Крейн М. Г.* Аналог неравенства Чебышева—Маркова в одномерной краевой задаче.— Докл. АН СССР, 1953, **89**, № 1, с. 5—8.
6. *Крейн М. Г.* Неравенства Чебышева—Маркова в теории спектральных функций струны.— Мат. исслед., 1970, **5**, вып. 1, с. 77—101.
7. *Марченко В. А.* Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов, I.— Тр. Моск. мат. о-ва, 1952, **1**, с. 327—420.

Одесский технологический
институт пищевой промышленности

Поступила в редакцию
24.12.1979 г.