УДК 517.949.22

В. Г. Самойленко

Обратная периодическая задача для нелинейных уравнений Ленгмюровской цепочки

Рассмотрим систему нелинейных дифференциально-разностных уравнений

$$dc_n/dt = c_n(c_{n+1} - c_{n-1}), \quad c_n(t) > 0, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \tag{1}$$

которая возникает при изучении тонкой структуры спектра ленгмюровских колебаний в плазме [1—3]. Часто ее называют ленгмюровской цепочкой [3]. Системы уравнений вида [1] также возникают при моделировании динамики биологических сообществ [4, 5] и являются уравнениями типа Вольтерра. Отметим, что система уравнений (1) в континуальном пределе [2, 3] переходит в уравнение Кортевега—де-Фриза

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^3} - 6v\frac{\partial v}{\partial x} = 0, \tag{2}$$

т. е. ее можно рассматривать как разностный аналог уравнения (2) на всей действительной оси.

В работах [2, 3, 5] эти уравнения (1) изучали при помощи метода обратной задачи, что позволило найти «дискретные» солитонные решения, на существование которых было указано в работе [1].

При помощи дискретного аналога периодического варианта метода обратной задачи [6, 7] дадим полное решение уравнений (1) в классе периодических по индексу n функций.

Пусть $c_n(t) = a_n^2(t)$, $0 < a_n(t) \in R^1$, $a_n(t)$ — в дальнейшем новая неизвестная функция. Система (1) эквивалентна системе

$$\frac{da_n}{dt} = 0{,}5a_n(a_{n+1}^2 - a_{n-1}^2), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{3}$$

Имеет место лемма.

Лемма 1. *Для уравнений* (3) *справедливо представление типа Лакса на матрицах второго порядка*

$$d\mathcal{L}_n(\lambda)/dt = \mathcal{M}_{n+1}(\lambda)\mathcal{L}_n(\lambda) - \mathcal{L}_n(\lambda)\mathcal{M}_n(\lambda), \tag{4}$$

где

$$\mathcal{L}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda}{a_{n+1}} & -\dfrac{a_n}{a_{n+1}} \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{M}_n(\lambda) = \begin{pmatrix} \dfrac{\lambda^2}{2} - \dfrac{a_{n+1}^2 - a_n^2}{2} & -\lambda a_n \\ \lambda a_n & -\dfrac{\lambda^2}{2} - \dfrac{a_n^2 - a_{n-1}^2}{2} \end{pmatrix} \tag{5}$$

$\lambda \in C^1$ — *произвольный параметр.*

Прямым вычислением легко показать, что уравнения (4) остаются справедливыми для всех $\lambda \in C^1$ тогда и только тогда, когда функция $a_n(t)$ удовлетворяет уравнениям (3).

В дальнейшем считаем, что функция $a_n(t)$ — $N+1$-периодическая по индексу n: $a_{n+N+1}(t) = a_n(t)$ $\forall t \in R^1$.

Рассмотрим следующие линейные задачи для вектор-функции $\mathbf{v}_n(t) \in C^2$:

$$\mathbf{v}_{n+1}(t) = \mathcal{L}_n(\lambda)\mathbf{v}_n(t), \quad d\mathbf{v}_n(t)/dt = \mathcal{M}_n(\lambda)\mathbf{v}_n(t). \tag{6}$$

Записывая условие совместности уравнений (6) в виде $\frac{d}{dt}\mathrm{v}_{n+1} = \left.\frac{d\mathrm{v}_m}{dt}\right|_{m=n+1}$, находим, что матрицы $\mathscr{L}_n(\lambda)$ и $\mathscr{M}_n(\lambda)$ должны удовлетворять уравнению (4). Это значит, что на решениях уравнений (3) линейные задачи (6) совместны при всех n и t.

Используя периодичность функции $a_n(t)$ по индексу n, для уравнений (6) определим матрицу монодромии $S_n = S_n(t, \lambda)$ [7] по формуле

$$\mathrm{v}_{n+N+1}(t) = S_n(t, \lambda)\,\mathrm{v}_n(t). \tag{7}$$

Из первого уравнения в (7) находим явную формулу

$$S_n(t, \lambda) = \prod_{j=0}^{\frown{N}} \mathscr{L}_{n+j}(\lambda) = \mathscr{L}_{n+N}(\lambda)\,\mathscr{L}_{n+N-1}(\lambda)\ldots\mathscr{L}_n(\lambda), \tag{8}$$

где $\frown{N}$ указывает на порядок возрастания индексов.

Следствием формулы (8) является следующая лемма.

Л е м м а 2. *Матрица монодромии* $S_n(t, \lambda)$ *для линейных задач* (6)— *полиномиальная по параметру* λ *матричная функция.*

Используя уравнения (6) и формулу (8) для матрицы монодромии $S_n(t, \lambda)$ нетрудно получить дифференциально-разностные уравнения

$$S_{n+1}(t, \lambda)\,\mathscr{L}_n(\lambda) = \mathscr{L}_n(\lambda)\,S_n(t, \lambda); \tag{9}$$

$$dS_n(t, \lambda)/dt = [\mathscr{M}_n, S_n]. \tag{10}$$

Уравнения (9), (10) в дальнейшем имеют важное значение, поэтому исследуем дополнительно их свойства.

Л е м м а 3. *Величины* $\det S_n$ и $\operatorname{Sp} S_n$ — *инварианты уравнений* (9), (10)

$$\begin{gathered} \frac{d}{dt}\det S_n = \frac{d}{dt}\operatorname{Sp} S_n = 0, \\ \det S_n = \det S_m, \quad \operatorname{Sp} S_n = \operatorname{Sp} S_m, \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \end{gathered} \tag{11}$$

Введем следующие обозначения: $S_n = \| S_n^{(ij)} \|$, $i, j = 1, 2$, $S_n^{(11)} + S_n^{(22)} = 2h_n$, $S_n^{(11)} - S_n^{(22)} = 2f_n$, $S_n^{(12)} = -\varphi_n$, $S_n^{(21)} = \chi_n$.

Тогда уравнения (9), (10) с учетом леммы 3 эквивалентны дифференциально-разностным уравнениям

$$\begin{gathered} \lambda(f_{n+1} - f_n) = \varphi_{n+1}a_{n+1} - \chi_n a_n, \quad a_{n+1}\varphi_n = a_n\chi_{n+1}, \\ a_{n+1}(f_{n+1} + f_n) = \lambda\chi_{n+1}, \quad a_n(f_{n+1} + f_n) = \lambda\varphi_n; \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} df_n/dt = \lambda a_n(\varphi_n - \chi_n), \quad dh_n/dt = 0, \\ d\varphi_n/dt = -2\lambda a_n f_n + \varphi_n(\lambda^2 - a_{n+1}^2/2 + a_n^2 - a_{n-1}^2/2), \\ d\chi_n/dt = 2\lambda a_n f_n - \chi_n(\lambda^2 - a_{n+1}^2/2 + a_n^2 - a_{n-1}^2/2), \end{gathered} \tag{13}$$

для которых справедлива такая теорема.

Т е о р е м а 1. *Системы дифференциально-разностных уравнений* (12), (13) *имеют полиномиальные по* λ *решения*

$$f_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} f_n^{(k)}(t)\,\lambda^{2k+1}, \quad \varphi_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} \varphi_n^{(k)}(t)\,\lambda^{2k}, \quad \chi_n(t, \lambda) = \sum_{k=0}^{N} \chi_n^{(k)}(t)\,\lambda^{2k} \tag{14}$$

тогда и только тогда, когда функции $f_n^{(k)}(t)$, $\varphi_n^{(k)}(t)$, $\chi_n^{(k)}(t)$ *удовлетворяют некоторым совместным автономным нелинейным дифференциально-раз-*

ностным уравнениям и справедливы равенства

$$f_n^{(N)}=f_m^{(N)},\ \ 2a_nf_n^{(N)}=\varphi_n^{(N)},\ \ 2a_{n+1}f_n^{(N)}=\chi_{n+1}^{(N)},\ \ a_{n+1}\varphi_n^{(k)}=a_n\chi_{n+1}^{(k)},$$

$$a_{n+1}\varphi_{n+1}^{(0)}=a_n\chi_n^{(0)},\ \ k=\overline{0,N},\ \ m,n=0,\pm 1,\pm 2,\ldots, \tag{15}$$

Если, кроме того, при некотором $n=n_0$ *и* $t=0$

$$f_{n_0}(0,\lambda)=f_{n_0}^{*}(0,\lambda^{*}),\ \ \chi_{n_0}(0,\lambda)=-\varphi_{n_0}^{*}(0,\lambda^{*}), \tag{16}$$

то эти автономные нелинейные уравнения имеют решение при всех n *и* t, *а соотношения* (15) *задают алгоритм построения явного действительного решения* $c_n(t)=a_n^2(t)$ *уравнения* (1).

Доказательство. Подставляя решение (14) в систему уравнений (12), (13) и используя произвольность выбора параметра λ, получим некоторую систему автономных нелинейных дифференциально-разностных уравнений. Используя соотношения (15) и разрешимость этих уравнений, построим алгоритм, ведущий к явным формулам для функции $c_n(t)=a_n^2(t)$. Для этого рассмотрим периодическую задачу Коши для уравнений (3). Пусть при некотором $n=n_0$ и при $t=0$ задано действительное число $a_{n_0}^2(0)=a_0^2$. Для того чтобы найти $N+1$ периодическое по индексу n решение $c_n(t)=a_n^2(t)$ уравнений (1), (3), необходимо отыскать набор величин

$$\{a_{n_0}^2(t),\ \ a_{n_0+1}^2(t),\ldots,a_{n_0+N}^2(t)\}, \tag{17}$$

где n_0 — произвольное число.

Рассмотрим полином $\varphi_n(t,\lambda)$ в форме

$$\varphi_n(t,\lambda)=\varphi_n^{(N)}(t)\prod_{i=1}^{N}(\lambda^2-\mu_i(n,t)), \tag{18}$$

где $\mu_i\ (n,t)$ — его нули. Подставив разложение (18) во второе уравнение системы (13), можно найти уравнения для нулей

$$d\mu_i(n,t)/dt=\sqrt{\mu_iP(\mu_i)}/(f_n^{(N)}\prod_{j\neq i}(\mu_i-\mu_j)), \tag{19}$$

где $P(\lambda^2)=f_n^2-\varphi_n\chi_n=\sum\limits_{k=0}^{2N+1}p_k\lambda^{2k}$, причем коэффициенты p_k, как это следует из уравнений (12), (13) и соотношений (16), действительные и не зависят от n и t. Используя соотношение $\varphi_n^{(N)}=2a_nf_n^{(N)}$ и то, что $f_n^{(N)}(t)$ не зависит от n и t, запишем уравнение (3) в виде

$$2d\ln\varphi_n^{(N)}/dt=a_{n+1}^2-a_{n-1}^2, \tag{20}$$

а из второго уравнения системы (13) находим

$$d\ln\varphi_n^{(N)}/dt=(-2a_nf_n^{(N-1)}+\varphi_n^{(N-1)})/\varphi_n^{(N)}-0{,}5a_{n+1}^2+a_n^2-0{,}5a_{n-1}^2; \tag{21}$$

$$d\ln\varphi_n^{(0)}/dt=-0{,}5a_{n+1}^2+a_n^2-0{,}5a_{n-1}^2. \tag{22}$$

Используя соотношения $2a_nf_n^{(N)}=\varphi_n^{(N)}$, $2a_{n+1}f_n^{(N)}=\chi_{n+1}^{(N)}$ и то, что числа p_k не зависят от n и t, находим

$$\frac{f_n^{(N-1)}}{f_n^{(N)}}=\frac{p_{2N}}{2p_{2N+1}}+\frac{\chi_n^{(N)}\varphi_n^{(N)}}{2p_{2N+1}}=\frac{p_{2N}}{2p_{2N+1}}+2a_n^2. \tag{23}$$

Формулы (20) — (23) с учетом соотношений

$$\varphi_n^{(N-1)}(t)=-\varphi_n^{(N)}(t)\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t),\ \varphi_n^{(0)}(t)=(-1)^N\varphi_n^{(N)}(t)\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)$$

позволяют найти выражение

$$c_n(t)=a_n^2(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)-\frac{p_{2N}}{4p_{2N+1}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t), \quad (24)$$

а также рекуррентное соотношение для $c_n(t)=a_n^2(t)$ и $c_{n+1}(t)=a_{n+1}^2(t)$

$$c_{n+1}(t)=-c_n(t)-\frac{0{,}5p_{2N}}{p_{2N+1}}-\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t). \quad (25)$$

Предположим, что, используя уравнения (19), мы явно определили величины $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)$ и $\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)$ по заданным начальным значениям $\mu_{i,0}=\mu_i(n_0,0)$, $i=\overline{1,N}$. Тогда по формуле (24) находим функцию

$$c_{n_0}(t)=a_{n_0}^2(t)=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)-\frac{p_{2N}}{4p_{2N+1}}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t), \quad (26)$$

а по известному выражению функции $c_{n_0}(t)$ из (25) легко определяем функцию

$$c_{n_0+1}(t)=-c_{n_0}(t)-\frac{p_{2N}}{2p_{2N+1}}-\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t). \quad (27)$$

Чтобы построить элемент $c_{n_0+2}(t)$ из набора (17), необходимо, как это следует из соотношений (24), (25), найти в явном виде выражения $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1\ t)$ и $\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)$. Используя соотношения $-\varphi_{n_0}^{(0)}\chi_{n_0}^{(0)}=p_0$, $a_{n_0+1}\varphi_{n_0+1}^{(0)}=a_{n_0}\chi_{n_0}^{(0)}$, получаем

$$\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)=\frac{(-1)^N\varphi_{n_0+1}^{(0)}}{\varphi_{n_0+1}^{(N)}}=\frac{(-1)^N\chi_{n_0}^{(0)}a_{n_0}}{2a_{n_0+1}^2f_{n_0}^{(N)}}=\frac{(-1)^{N+1}a_{n_0}p_0}{2c_{n_0+1}f_{n_0}^{(N)}\varphi_{n_0}^{(0)}}=$$

$$=-\frac{(-1)^N p_0\varphi_{n_0}^{(N)}}{4c_{n_0+1}(f_n^{(N)})^2\varphi_{n_0}^{(0)}}=-\frac{p_0}{4c_{n_0+1}p_{2N+1}\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0,t)}. \quad (28)$$

Из формулы (24) при $n=n_0+1$ по известному выражению для $\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)$ находим $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n_0+1,t)$, а из (25) при $n=n_0+1$ уже можно найти явный вид функции $c_{n_0+2}(t)=a_{n_0+2}^2(t)$. Аналогично находятся остальные функции $a_{n_0+i}^2(t)$, $i=\overline{3,N}$ из набора (17).

Для доказательства разрешимости и нахождения явных выражений $\sum_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)$ и $\ln\prod_{i=1}^{N}\mu_i(n,t)$ рассмотрим уравнения (19) на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{U}$ функции $w=\sqrt{zP(z)}$, $z,w\in C^1$. Пусть E_i, $i=\overline{1,2N+1}$ — нули полинома $P(z)$. Риманову поверхность $\mathfrak{U}$ функции $w=\sqrt{zP(z)}$ реализуем в виде двулистной поверхности наложения комплексной плоскости C^1 с непересекающимися разрезами по отрезкам $(\infty,0]$, $[E_{2i-1},E_{2i}]$, $[E_{2N+1},\infty)$, $i=\overline{1,N}$. Точки верхнего листа обозначим через $(z,+\sqrt{zP(z)})$, а нижнего — через $(z,-\sqrt{zP(z)})$. Функция $w=\sqrt{zP(z)}$

аналитична и однозначна на поверхности $\mathfrak{U}$. Начальные значения $\mu_{i,0} = \mu_i(n_0, 0)$ определяются как точки на поверхности $\mathfrak{U}$ той ветвью функции $w = \sqrt{zP(z)}$, для которой выполнено соотношение $\sum_{i=0}^{N} f_{n_0}^{(k)}(0)\, \mu_{i,0}^{k+1} = \sqrt{\mu_{i,0} P(\mu_{i,0})}$. Алгебраический род поверхности $\mathfrak{U}$ равен N. На поверхности $\mathfrak{U}$ существует [8] базис циклов $a_1, a_2, \ldots, a_N, b_1, b_2, \ldots, b_N$ с индексами пересечений $a_i \circ a_j = b_i \circ b_j = 0$, $a_i \circ b_j = \delta_{ij}$. Как обычно, за циклы a_i, $i = \overline{1, N}$, принимают кривые, расположенные на верхнем листе поверхности $\mathfrak{U}$, которые обходят по часовой стрелке отрезок $[E_{2i-1}, E_{2i}]$, а за циклы b_i, $i = \overline{1, N}$, — кривые, которые начинаются в точке E_{2i}, по верхнему листу приходят в точку E_{2N+1} и по нижнему листу снова возвращаются в точку E_{2i}.

Пусть

$$\omega_i(z) = \int_{E_{2N+1}}^{z} \frac{g_i(\xi)\, d\xi}{\sqrt{\xi P(\xi)}}, \quad g_i(\xi) = \sum_{k=0}^{N-1} C_i^{(k)} \xi^k, \quad i = \overline{1, N}, \tag{29}$$

— нормированный базис абелевых интегралов первого рода [8 — 10] на поверхности $\mathfrak{U}$. Матрица $B = \| B_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, N}$, $B_{ij} = \oint_{b_i} d\omega_j(z)$ называется матрицей Римана. Она симметрична, а ее мнимая часть положительно определена. Выполняя в уравнениях (19) отображение Абеля $\nu_j(t) = \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(n_0, t))$, получаем $\nu_j(t) = \alpha_j t + \nu_j(0)$, $\alpha_j = C_j^{(N-1)} / f_n^{(N)}$. Отсюда заключаем, что точки $\mu_i(n_0, t)$ образуют решение классической проблемы Якоби обращения абелевых интегралов на гиперэллиптической римановой поверхности $\mathfrak{U}$

$$\sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_i(n_0, t)) = \alpha_j t + \sum_{i=1}^{N} \omega_j(\mu_{i,0}).$$

Для ее решения согласно [9, 10] рассмотрим N-мерную θ-функцию Римана, построенную по матрице периодов (I, B) базиса абелевых интегралов (29)

$$\theta(\vec{u}) = \sum_{\vec{m} \in Z^N} \exp\{2\pi i (\vec{m}, \vec{u}) + \pi i (B\vec{m}, \vec{m})\}, \tag{30}$$

где Z^N — пространство целочисленных векторов в R^N, вектор $\vec{u} \in C^N$ и $(\cdot, \cdot)$ — обычное скалярное произведение. Обозначим через $\hat{\mathfrak{U}}$ поверхность $\mathfrak{U}$, разрезанную по a-циклам и введем Θ-функцию $\Theta(z) = \theta(\vec{\omega}(z) - \vec{e})$, где $e_j = \alpha_j t + \gamma_j$, $\gamma_j = \sum_{i=1}^{N} \left(\omega_j(\mu_{i,0}) + \frac{1}{2} B_{ij} \right) - \frac{j}{2}$. Известно [9], что функция $\Theta(z)$ аналитична на поверхности $\hat{\mathfrak{U}}$, а ее нули совпадают с точками $\mu_i(n_0, t)$. Используя алгоритм, предложенный в работе [10], находим

$$\sum_{i=1}^{N} \mu_i(n_0, t) = \sum_{i=1}^{N} \oint_{a_i} z\, d\omega_i(z) + \frac{d}{dt} \ln \frac{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\gamma} + \vec{\delta})}{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\gamma} - \vec{\delta})}; \tag{31}$$

$$\ln \prod_{i=1}^{N} \mu_i(n_0, t) = \ln \frac{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\gamma} + \vec{\sigma})\, \theta(\vec{\alpha}t + \vec{\gamma} - \vec{\sigma})}{\theta(\vec{\alpha}t + \vec{\gamma} + \vec{\delta})\, \theta(\vec{\alpha}t + \vec{\gamma} - \vec{\delta})} + 2\pi i m + \sum_{i=1}^{N} \oint_{a_i} \ln z\, d\omega_i(z), \tag{32}$$

где $\vec{\delta} = \vec{\omega}(+\infty)$, $\vec{\sigma} = \vec{\omega}(+0)$, m — произвольное целое число. Подставляя выражения (31) и (32) в формулы (26) — (28), мы тем самым находим явные решения уравнений (1) и (3). Сформулируем основной результат в виде конструктивной теоремы.

Теорема 2. *Пусть заданы произвольные попарно-разные числа* $E_i \in C^1$, $i = \overline{1, 2N+1}$ *и числа* $\mu_{j,0} = \mu_j(n_0, 0) \in C^1$, $j = \overline{1, N}$ *так, что выполнено условие*

$$\prod_{i=1}^{2N+1} (\mu_{j,0} - E_i) = \mu_{j,0} f_{n_0}^2 (\mu_{j,0})\, p_{2N+1}^{-1},$$

где $f_{n_0}(\lambda)$ — *полином степени* N *с действительными коэффициентами, число* $p_{2N+1} = (f_n^{(N)})^2$. *Тогда существует решение периодической задачи Коши для уравнений* (1), (3), *которое находится в явном виде изложенным выше алгоритмом.*

В силу свойств θ-функции решение $\{c_{n_0}(t), c_{n_0+1}(t), \dots, c_{n_0+N}(t)\}$ будет почти-периодической функцией переменной t с почти-периодами $(T_1, T_2, \dots, T_N)$, вычисляемых по формулам $T_j^{-1} = \sum_{i=1}^{N} (B^{-1})_{ji}\alpha_i$.

Как обычно [11], класс периодических решений уравнений (1) можно существенно увеличить при помощи вырождения римановой поверхности $\mathfrak{A}$, задающей решения. Эту процедуру можно применять для получения солитонных решений, имеющих важное значение в приложениях.

1. *Захаров В. Е., Мушер С. Л., Рубенчик А. М.* О нелинейной стадии параметрического возбуждения волн в плазме.—Письма в Журн. эксперим. и теорет. физики, 1974, **19**, вып. 5, с. 249—253.
2. *Манаков С. В.* О полной интегрируемости и стохастизации в дискретных динамических системах. — Журн. эксперим и теорет. физики, 1974, **67**, вып. 218, с. 543—555.
3. *Захаров В. Е., Манаков В. Б., Новиков С. П., Питаевский Л. П.* Теория солитонов: метод обратной задачи.— М.: Наука, 1980.— 319 с.
4. *Свирижев Ю. М., Логофет Е. Я.* Устойчивость биологических сообществ.— М.: Наука, 1978.— 352 с.
5. *Wadati M.* Transformation theories for nonlinear discrete systems.— Suppl. Progr. Theor. Phys., 1976, N 59, p. 36—63.
6. *Марченко В. А.* Операторы Штурма—Лиувилля и их приложения.— Киев: Наук. думка, 1977.— 332 с.
7. *Боголюбов Н. Н. (мл.), Прикарпатский А. К., Самойленко В. Г.* Дискретная периодическая задача для модифицированного нелинейного уравнения Кортевега—де Фриза.— Докл. АН СССР, 1981, 258, № 3, с. 575—580.
8. *Спрингер Дж.* Введение в теорию римановых поверхностей— М.: Изд-во иностр. лит., 1961.— 240 с.
9. *Чеботарев Н. Г.* Теория алгебраических функций.— М.: Гостехиздат, 1948.— 240 с.
10. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций.— Успехи мат. наук, 1971, **26**, вып. 1, с. 113—179.
11. *Matveev V. B., Yavor M. I.* Solutions presque pèriodiques et a *N*-solitons de l'èquation hydrodynamique non lineare de Kaup.— Ann. Inst. Henri Poincaré, 1979, **31**, N 1, Sect. A, p. 25—41.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
29.01.1981 г.