УДК 517.948

Г. А. Дерфель

О поведении решений функциональных и дифференциально-функциональных уравнений с несколькими преобразованиями аргумента

В настоящей статье, примыкающей по своей тематике к работам [1—5], изучается поведение в нуле решений функционального уравнения

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{k=0}^{m} a_{jk}p^{\beta_k}f(\alpha_j p)=0, \tag{1}$$

где a_{jk} — комплексные постоянные, α_j и β_j — вещественные числа такие, что $1=\alpha_0<\alpha_1<\ldots<\alpha_l$; $0=\beta_0<\beta_1<\ldots<\beta_m$. Чтобы уравнение (1) действительно содержало отклонения аргумента, в дальнейшем предполагаем, что существуют $0\leqslant k_1$, $k_2\leqslant m$ для которых $a_{0k_1}\neq 0$, $a_{lk_2}\neq 0$. Всюду, где не оговорено противное, будем рассматривать решения уравнения (1), заданные в некоторой проколотой окрестности нуля $(0<|p|<r)$, понимая под таким решением комплекснозначную функцию $f(p)$ вещественного переменного p, определенную и непрерывную при $0<|p|<\alpha_l r$ и обращающую (1) в тождество при всех $0<|p|<r$.

Если β_k — рациональные числа, а α_j — мультипликативно соизмеримы, т. е. $\alpha_j=q^{r_j}$, где $q>1$, а r_j — рациональные, то уравнение (1) сводится к так называемому q-разностному уравнению, которое изучено в работах [6—7].

Теоремы 1 и 2, приведенные ниже, позволяют перенести некоторые результаты теории q-разностных уравнений на уравнение вида (1).

Эти результаты применяются (теорема 3) к доказательству существования быстро убывающих на бесконечности решений дифференциально-функционального уравнения

$$y^{(m)}(x) = \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=0}^{m} b_{jk} y^{(k)}(\lambda_j x), \tag{2}$$

где b_{jk} — комплексные постоянные, λ_j — вещественные, причем

$$1 < \lambda_0 < \ldots < \lambda_l \tag{3}$$

(предполагается, что существует $0 \leqslant j_1 \leqslant l$, для которого $b_{j_1 0} \neq 0$).

Введем необходимые обозначения и определения. Через k_j обозначим наименьший индекс k, для которого $a_{jk_j} \neq 0$. Нанесем на плоскость точки с координатами $(\ln \alpha_j, \beta_{k_j})$. Диаграмму Ньютона отмеченных точек назовем характеристической ломаной L уравнения (1). Обозначим через μ тангенс угла наклона крайнего справа звена характеристической ломаной L (т. е. μ — угловой коэффициент прямой, на которой лежит это звено).

Следующие теоремы 1 и 2 характеризуют поведение в нуле решений уравнения (1).

Т е о р е м а 1. *Если $\mu = 0$, то уравнение* (1) *имеет в некоторой окрестности нуля $0 < |p| < r$ однопараметрическое семейство решений вида*

$$f(p) = Cp^{\sigma} \sum_{\nu_1, \ldots, \nu_m = 0} c_{\nu_1, \ldots, \nu_m} (p^{\beta_1})^{\nu_1} \ldots (p^{\beta_m})^{\nu_m}, \tag{4}$$

где ряд сходится при $|p| < r$; σ — корень квазиполинома $g(s) = \sum_{j=0}^{l} a_{j0} e^{s \ln \alpha_j}$, а $\sigma + \nu_1\beta_1 + \ldots + \nu_m\beta_m$ не является корнем $g(s)$ ни при каких натуральных $\nu_1, \ldots, \nu_m$; коэффициент $c_{0,\ldots,0}$ может быть выбран произвольно.

Теорема 2 дает необходимое и достаточное условие существования ограниченного в нуле решения при $\mu \neq 0$.

Т е о р е м а 2. 1) *если $\mu > 0$, то уравнение* (1) *имеет хотя бы одно нетривиальное ограниченное в нуле решение. Более того, существует решение, удовлетворяющее в некоторой окрестности нуля оценке*

$$|f(p)| \leqslant C \exp\{-\mu_1 \ln^2 |p|\}, \quad 0 \leqslant |p| < r \tag{5}$$

с некоторым $C > 0$ и любым $\mu_1 < \mu/2$.

2) *если $\mu < 0$, то уравнение* (1) *имеет единственное ограниченное в нуле решение $f(p) \equiv 0$. Если решение $f(p)$ удовлетворяет в некоторой окрестности нуля оценке*

$$|f(p)| \leqslant C \exp\{\mu_2 \ln^2 |p|\}, \qquad 0 < |p| < r \tag{6}$$

с каким-либо $C > 0$ и $\mu_2 < -0{,}5\mu \ln^2(\alpha_l/\alpha_{l-1})/\ln^2 \alpha_l$, то $f(p)$ тождественно равно нулю.

Д о к а з а т е л ь с т в о т е о р е м ы 1. Сокращая при необходимости все члены уравнения (1) на общий множитель p^{β}, где $\beta = \min\limits_{0 \leqslant j \leqslant l} \beta_{k_j}$ всегда можно добиться, чтобы по крайней мере одна точка характеристической ломаной L лежала на оси x. Поэтому, если $\mu = 0$, то, не уменьшая общности, можно считать, что крайнее справа звено ломаной L лежит на оси x, т. е.

$$a_{l_0} \neq 0 \tag{7}$$

и существует $j_0 = 0, \ldots, l-1$ такое, что

$$a_{j_0 0} \neq 0; \; a_{j0} = 0 \text{ при всех } j = 0, \ldots, j_0 - 1. \tag{8}$$

Положим $\alpha_j = e^{\gamma_j}$ и подставим (4) в (1). Тогда для определения $c_{\nu_1, \ldots, \nu_m}$

получаем разностное уравнение

$$\left[\sum_{j=0}^{l} a_{j0} e^{(\sigma+\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_j}\right] c_{\nu_1,\ldots,\nu_m} +$$

$$+\sum_{k=1}^{m}\left\{\sum_{j=0}^{l} a_{jk} e^{[\sigma+\nu_1\beta_1+\ldots+(\nu_k-1)\beta_k+\ldots+\nu_m\beta_m]\gamma_j}\right\} c_{\nu_1,\ldots,\nu_k-1,\ldots,\nu_m}=0 \tag{9}$$

с начальными условиями

$$c_{\nu_1,\ldots,\nu_{k-1},\ldots,\nu_m}=0, \text{ если } \nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_k=0, \ldots, \nu_m \geqslant 0. \tag{10}$$

Выберем теперь в качестве σ, фигурирующего в (4), такое число, что

$$\sum_{j=0}^{l} a_{j0} e^{\sigma\gamma_j}=0; \tag{11}$$

$$\sum_{j=0}^{l} a_{j0} e^{(\sigma+\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_j} \neq 0, \tag{12}$$

если хотя бы одно из чисел $\nu_1, \ldots, \nu_m$ отлично от нуля. Для доказательства существования такого σ заметим, что согласно (7) и (8) квазиполином $g(s)=\sum_{j=0}^{l} a_{j0} e^{s\gamma_j}$ имеет бесконечное число корней, причем все они расположены в некоторой полосе $d_2 \leqslant \operatorname{Re} s \leqslant d_2$, параллельной мнимой оси (см. [8] п. 12.5). Если считать d_1 и d_2 точной нижней и соответственно точной верхней гранями вещественных частей этих корней, то существует хотя бы один корень $s=\sigma$ такой, что $d_2-\operatorname{Re}\sigma<\beta_1$. Для этого корня, очевидно, выполняются условия (11) и (12).

Из (9), (10) и (11) следует, что коэффициент $c_{0,\ldots,0}$ может быть выбран произвольно. Если $c_{0,\ldots,0}$ уже выбран, то уравнение (9) позволит определить $c_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$, для которых

$$\nu_1+\ldots+\nu_m=1; \quad \nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0 \tag{13}$$

(в силу (12) они определяются однозначно).

Если найдены все $c_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$, мультиндекс $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$ которых принадлежит $(m-1)$-мерному симплексу $S_k^{m-1}=\{\nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0 | \nu_1+\ldots+\nu_m=k\}$, то уравнение (9) позволяет (и притом в силу (12) однозначно) определить все $c_{\nu_1,\ldots,\nu_m}$, для которых $(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in S_{k+1}^{m-1}=\{\nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0 \mid \nu_1+\ldots$ $\ldots+\nu_m=k+1\}$. При этом выполняется оценка

$$|c_{\nu_1,\ldots,\nu_m}| \leqslant M(mD)^{\nu_1+\ldots+\nu_m}, \qquad \nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0, \tag{14}$$

где $M=|c_{0,\ldots,0}|$, D — некоторое положительное число.

Чтобы установить (14), докажем справедливость неравенства

$$|c_{\nu_1,\ldots,\nu_m}| \leqslant D \sum_{k=1}^{m} |c_{\nu_1,\ldots\nu_k-1,\ldots,\nu_m}|, \; \nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0. \tag{15}$$

Действительно,

$$L_0(\nu_1, \ldots, \nu_m)=\left|\sum_{j=0}^{l} a_{j0} e^{(\sigma+\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_j}\right|=$$

$$=|a_{l_0}|\,|e^{\sigma\gamma_l}|\,|e^{(\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_l}|\,\left|1+\sum_{i=0}^{l}\frac{a_{l-i,0}}{a_{l_0}} e^{(\sigma+\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)(\gamma_l-\gamma_{l-i})}\right|. \tag{16}$$

Если число $\nu_1\beta_1 + \ldots + \nu_m\beta_m > R$ достаточно велико, то последний сомножитель в (16) больше $1/2$, поэтому

$$L_0(\nu_1, \ldots, \nu_m) > D_R e^{(\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_l}, \text{ где } D_R = \frac{1}{2}|a_{l_0}||e^{\sigma\gamma_l}|. \quad (17)$$

Если же $\nu_1\beta_1 + \ldots + \nu_m\beta_m \leqslant R$, то

$$L_0(\nu_1, \ldots, \nu_m) = D_{\nu_1,\ldots,\nu_m} e^{(\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_l}, \quad (18)$$

причем из (12) следует, что $D_{\nu_1,\ldots,\nu_m} \neq 0$. Обозначим

$$D_1 = \min_{\{\nu_1\geqslant 0,\ldots,\nu_m\geqslant 0 | \nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m\leqslant R\}} (D_{\nu_1,\ldots,\nu_m}, D_R) > 0,$$

тогда из (17) и (18) следует, что

$$L_0(\nu_1, \ldots, \nu_m) \geqslant D_1 e^{(\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_l}, \quad \nu_1 \geqslant 0, \ldots, \nu_m \geqslant 0. \quad (19)$$

Кроме того,

$$L_k(\nu_1, \ldots, \nu_m) = \Big|\sum_{j=0}^{l} a_{jk} e^{[\sigma+\nu_1\beta_1+\ldots+(\nu_k-1)\beta_k+\ldots+\nu_m\beta_m]\gamma_j}\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{j=0}^{l} |a_{jk}||e^{\sigma\gamma_j}||e^{(\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_k\beta_k+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_l}| \leqslant D_2 e^{(\nu_1\beta_1+\ldots+\nu_m\beta_m)\gamma_l}, \quad (20)$$

где $D_2 = \sum_{j=0}^{l} |a_{jk}||e^{\sigma\gamma_j}|$. Теперь (15) вытекает из (19) и (20).

Предположим, что оценка (14) имеет место при всех $(\nu_1, \ldots, \nu_m)$, принадлежащих симплексу S_k^{m-1}. Тогда из индуктивного предположения, начальных условий (10) и неравенства (15) заключаем, что при всех $(\nu_1, \ldots, \nu_m) \in S_{k+1}^{m-1}$ $|c_{\nu_1,\ldots,\nu_m}| \leqslant Dm(mD)^k M = (mD)^{k+1} M$. Этим доказано (14). Поскольку из (14) вытекает, что ряд в (4) сходится в некоторой окрестности нуля $|p| < r$, то теорема 1 полностью доказана.

Доказательство теоремы 2. Пусть $f(p)$ — решение уравнения (1). Положим

$$f(p) = e^{-\frac{\mu}{2}\ln^2 p} g(p). \quad (21)$$

Тогда функция $g(p)$ удовлетворяет уравнению

$$\sum_{j=0}^{l}\sum_{k=0}^{m} a_{jk} e^{-\frac{\mu}{2}\gamma_j^2} p^{\beta_k - \mu\gamma_j} g(\alpha_j p), \quad (22)$$

где, как и раньше, $\gamma_j = \ln \alpha_j$. Это уравнение того же типа, что и (1). Его характеристическая ломаная L' получается из характеристической ломаной L уравнения (1) преобразованием $F: (\gamma, \beta) \to (\gamma, \beta - \mu\gamma)$ плоскости (γ, β) в себя. Если какой-нибудь сегмент ломаной L лежит на прямой $\beta = \eta\gamma + b$ с угловым коэффициентом η, то соответствующий сегмент ломаной L' лежит на прямой $\beta = (\eta - \mu)\gamma + b$, угловой коэффициент которой на μ меньше. В частности, крайний правый сегмент ломаной L' будет горизонтальным. Значит для уравнения (22) выполняются условия теоремы 1, и это уравнение имеет решение вида (4). Утверждение 1) теоремы 2 непосредственно вытекает теперь из (21).

Ниже докажем, что если функция $f(p)$ удовлетворяет уравнению (1) и оценке (6) хотя бы при $0 < p \leqslant r$, то уже отсюда будет следовать, что $f(p) \equiv 0$.

Если $\mu < 0$, то, не уменьшая общности, можно считать

$$a_{l_0} \neq 0, \; a_{j_0} = 0, \; \frac{\beta_{k_j}}{\ln\alpha_l - \ln\alpha_j} \geqslant -\mu \text{ при } j = 0, \ldots, l-1 \quad (23)$$

(k_j — как и выше, наименьший индекс k, для которого $a_{jk_j} \neq 0$). Поэтому

$$\beta_{k_j} \geqslant \delta = -\mu (\ln \alpha_l - \ln \alpha_{l-1}), \tag{24}$$

и в достаточно малой окрестности нуля $0 \leqslant p < r$ имеют место неравенства

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{lk} p^{\beta_k} \right| > \frac{1}{2} | a_{l_0} |; \tag{25}$$

$$\left| \sum_{k=0}^{m} a_{jk} p^{\beta_k} \right| \leqslant | a_{jk_j} | p^{\beta_{k_j}} \left| 1 + \sum_{k=k_j+1}^{m} \frac{a_{jk}}{a_{jk_j}} p^{\beta_k - \beta_{k_j}} \right| \leqslant D_1 p^{\delta},$$

$$j = 0, \dots, l-1, \tag{26}$$

где $D_1 = 2 \max\limits_{\substack{j=0,\dots,l \\ k=0,\dots,m}} | a_{jk} |$. Обозначим

$$a_j(p) = \left(\sum_{k=0}^{m} a_{jk} p^{\beta_k} \right) / \sum_{k=0}^{m} a_{l_k} p^{\beta_k} \Bigg), \quad b_{j+1}(p) = a_j \left(\frac{p}{\alpha_l} \right),$$

$$\xi_{j+1} = \alpha_j / \alpha_l, \quad 0 < \xi_1 < \dots < \xi_l < 1, \qquad j = 0, \dots, l-1, \tag{27}$$

тогда из (1) вытекает оценка

$$| f(p) | \leqslant \sum_{j=1}^{l} | b_j(p) f(\xi_j p) |, \tag{28}$$

причем согласно (25) и (26)

$$| b_j(p) | \leqslant D_2 p^{\delta}. \tag{29}$$

Пусть $0 < p_0 < r$, обозначим $I_n = [\xi_1^{n+1} p_0, \xi_1^n p_0]$, $M_n = \max\limits_{p \in I_n} | f(p) |$, $n = 0, 1, \dots$, и докажем неравенство

$$M_n \geqslant D^n \exp \left\{ -\frac{\mu}{2} \ln^2 \frac{\alpha_{l-1}}{\alpha_l} n^2 \right\} M_0, \tag{30}$$

где D — некоторое положительное число. Для этого заметим, что при любых $0 < p < p_0$ и $n = 0, 1, \dots$ можно, итерируя (28), оценить значение функции f в точке p через значения этой функции на интервале I_n с помощью неравенства

$$| f(p) | \leqslant \sum_{\substack{j_1, \dots, j_s = 1 \\ \xi_{j_1} \dots \xi_{j_s} p \in I_n}}^{l} b_{j_1}(p) b_{j_2}(\xi_{j_1} p) \dots b_{j_s}(\xi_{j_1} \dots \xi_{j_{s-1}} p) f(\xi_{j_1} \dots \xi_{j_s} p) |, \tag{31}$$

где сумма берется по всевозможным наборам $j_i = 1, \dots, l$; $i = 1, \dots, s$ таким, что $\xi_{j_1} \dots \xi_{j_s} p \in I_n$. Индекс s в правой части (31) достигает своего наименьшего значения $s_{\min}$, когда $\xi_{j_1} = \dots = \xi_{j_s} = \xi_1$, и достигает своего наибольшего значения $s_{\max}$, когда $\xi_{j_1} = \dots = \xi_{j_s} = \xi_l$. Поэтому, если $p \in I_n$, то

$$s_{\min} = n - 1; \quad s_{\max} \leqslant (n+1) \frac{\ln \xi_1}{\ln \xi_l}. \tag{32}$$

При этом сумма в (31) состоит не более чем из $l^{s_{\max}}$ слагаемых, каждое из которых в соответствии с (29) допускает оценку

$$|b_{j_1}(p)\, b_{j_2}(\xi_{j_1}p) \dots b_{j_s}(\xi_{j_1} \dots \xi_{j_{s-1}}p)\, f(\xi_{j_1} \dots \xi_{j_s}p)| \leqslant$$

$$\leqslant D_2^s p^\delta (\xi_{j_1}p)^\delta \dots (\xi_{j_1} \dots \xi_{j_s}p)^\delta M_n \leqslant D_3^{s} \max \xi_l^{\frac{\delta}{2}s^2 \min} M_n \tag{33}$$

с некоторым $D_3 > 0$. Из (31), (32) и (33) заключаем, что

$$M_0 \leqslant D_4^n \xi_l^{\frac{\delta}{2}n^2} M_n. \tag{34}$$

Подставляя в (34) вместо δ и ξ_l их значения из формул (24) и (27), получаем искомое неравенство (30).

Заметим, что при $p \in I_n$

$$(\ln p - \ln p_0)/\ln \xi_1 - 1 \leqslant n \leqslant (\ln p - \ln p_0)/\ln \xi_1. \tag{35}$$

Кроме того, что для любого нетривиального решения $f(p)$ уравнения (1) $M_0 \neq 0$. Поэтому утверждение 2) теоремы 2 следует из (30), (35) и равенства $\xi_1 = 1/\alpha_l$.

На основании п. 1) теоремы 2 доказывается следующая теорема.

Теорема 3. *Если выполняется условие* (3), *то при любом* $c > 0$ *и* $\mu_3 < m/(2 \ln \lambda_l)$ *уравнение* (2) *имеет нефинитное решение, определенное на всей оси и удовлетворяющее оценке*

$$|y(x)| \leqslant C \exp\{-\mu_3 \ln^2 (1 + |x|)\}, \qquad -\infty < x < \infty. \tag{36}$$

В [5] теорема 3 была доказана при дополнительном предположении мультипликативной соизмеримости λ_j ([5], теорема 1.4). Способ доказательства, предложенный в настоящей статье, позволяет избавиться от этого ограничения.

Доказательство теоремы 3. После того, как установлена теорема 2, доказательство теоремы 3 завершается аналогично доказательству теоремы 1.4 из [5]. Поэтому наметим здесь лишь схему соответствующих рассуждений.

Искомое нефинитное решение уравнения (2), удовлетворяющее оценке (36) и дополнительным начальным условиям $y^{(k)}(0) = 0$, $k = 0, \dots, m - 1$, может быть найдено при помощи преобразования Лапласа. Для этого функция

$$f(p) = \int_0^\infty y(x)\, e^{-px} dx \tag{37}$$

должна удовлетворять уравнению

$$p^m f(p) + \sum_{j=0}^{l} \sum_{k=0}^{m-1} c_{jk} p^k f\left(\frac{p}{\lambda_j}\right) = 0 \tag{38}$$

с некоторыми постоянными c_{jk}. Уравнение (38) — это уравнение вида (2), причем в данном случае $\mu \geqslant m/\ln \lambda_l$. Согласно п. 1) теоремы 2 уравнение (38) имеет в некоторой окрестности нуля нетривиальное решение, удовлетворяющее оценке (5). Легко видеть, что это решение можно аналитически продолжить на всю комплексную плоскость с разрезом вдоль отрицательной полуоси вещественной оси так, что в разрезанной окрестности нуля ($0 < |p| < r$; $-\pi < \arg p < \pi$) сохраняется оценка (5). Кроме того, будет выполняться неравенство

$$|f(p)| \leqslant C_4 \exp\{-\mu_4 \ln^2 |p|\}, \quad |p| > r, \quad -\pi < \arg p < \pi, \tag{39}$$

где C_4 и μ_4 — некоторые положительные постоянные. Из (37), (5) и (39) вытекает, что $y(x)$ удовлетворяет оценке (36).

С помощью рассуждений, аналогичных проведенным при доказательстве теоремы 3 (основанном на п. 1) теоремы 2), несложно убедиться в том, что и в теореме 4.2. из [5] условие мультипликативной соизмеримости преобразований аргумента может быть опущено.

Решение $y(x)$, построенное при доказательстве теоремы 3, удовлетворяет не только оценке (36), но и оценке $|y(x)| \leqslant C \exp\{-\mu_5 \ln^2 |x|\}$, $-\infty < x < \infty$, с некоторым $0 < \mu_5 \leqslant \mu_3$ (см. [4], теорема 3).

В условиях теоремы 1 существуют решения уравнения (1), не представимые в форме (4) (см. [6]).

1. *Шарковский А. Н.* О проблеме единственности решений дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом.— Мат. физика, 1970, вып. 8, с. 167—172.
2. *Полищук В. М., Шарковский А. Н.* Общее решение линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа.— В кн.: Дифференциально-разностные уравнения. Киев: Наук. думка, 1971, с. 126—139.
3. *Kato T., McLeod J.* The functional-differential equation $y'(x) = ay(\lambda x) + by(x)$.— Bull. Amer. Math. Soc., 1971, 77, № 6, p. 891—937.
4. *Дерфель Г. А.* Об асимптотических свойствах решений некоторых линейных функционально-дифференциальных уравнений.— Докл. семинара Ин-та прикл. математики Тбил. ун-та, 1978, № 12/13, с. 21—23.
5. *Дерфель Г. А.* Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с линейно-преобразованным аргументом: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— Тбилиси, 1977.— 16 с.
6. *Adams C. R.* Linear q-difference equations.— Bull. Amer. Math. Soc., 1931, 37, № 6, p. 361—400.
7. *Trjitzinsky W.* Analytic theory of linear q-difference equations.— Acta math., 1933, **61**, p. 1—38.
8. *Беллман Р., Кук К.* Дифференциально-разностные уравнения.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

Карагандинский
государственный университет

Поступила в редакцию 28.11.1980 г.
после переработки — 02.12.1981 г.