УДК 513.88

В. Э. Лянце, О. Г. Сторож

Операторы, удовлетворяющие условиям гладкости

Вводится и изучается понятие гладкости, обуславливающее появление нелокальных членов в возмущении оператора.

1. Условие гладкости. Применяем следующие обозначения. Для произвольного линейного оператора T $D(T) = \operatorname{dom} T$, $R(T) = \operatorname{im} T$, $Z(T) = \ker T$. Для произвольных нормированных пространств X и Y $\mathfrak{C}(X; Y)$ обозначает множество плотно заданных замкнутых линейных операторов $X \to Y$, а $\mathcal{B}(X; Y) = \{T \in \mathfrak{C}(X; Y) : D(T) = X\}$. Пусть H_1 и H_2 — гильбертовы пространства и $T \in \mathfrak{C}(H_1; H_2)$. Через $D[T]$ обозначаем линейное пространство $D(T)$, наделенное скалярным произведением $(f \mid g)_{D[T]} = (f \mid g)_{H_1} + (Tf \mid Tg)_{H_2}$, f, $g \in D(T)$. Кроме того, T^* обозначает гильбертов сопряженный оператор к T. Однако, если $A \in \mathcal{B}(D[T]; H_2)$, то $A^* \in \mathcal{B}(H_2, D[T])$ и $\forall f \in D(T)$, $\forall g \in H_2$ $(Af \mid g)_{H_2} = (f \mid A^*g)_{D[T]}$, так что игнорируется возможность трактовать A как оператор $H_1 \to H_2$. Встречающиеся далее символы $\oplus$ и $\ominus$ относятся к скалярному произведению $(\cdot \mid \cdot)_{D[T]}$, причем из контекста ясно, какой оператор T имеется в виду.

Далее H обозначает фиксированное гильбертово пространство, а L_0 и L — фиксированные операторы из $\mathfrak{C}(H) = \mathfrak{C}(H; H)$ такие, что $L_0 \subset L$. Кроме того, $M_0 = L^*$, $M = L_0^*$, так что M_0, $M \in \mathfrak{C}(H)$ и $M_0 \subset M$.

Определение 1.1. *Пусть U — гильбертово пространство и $(P \in \mathcal{B}(D[L]; U)$. Пара (U, P) называется краевой (для (L_0, L)), если $Z(P) = D(L_0)$ и $R(P) = U$. Если (U, P) — краевая пара, то U называется пространством краевых значений, а P — основным краевым оператором.*

Замечание 1.2. Краевая пара существует, в качестве U можно принять $D(L) \ominus D(L_0)$, а в качестве P — ортопроектор $D(L) \to D(L) \ominus D(L_0)$ (знак $\ominus$ относится к $(\cdot \mid \cdot)_{D[L]}$). Нетрудно видеть, что краевая пара единственна в том смысле, что если (U, P) и (U_1, P_1) — краевые пары для (L_0, L), то существует биекция $E \in \mathcal{B}(U; U_1)$ такая, что $P_1 = EP$.

Определение 1. 3. *Произвольный оператор $V \in B(D[L]; H)$ называем возмущением. Оператор $F \in \mathcal{B}(D[L]; U)$ (здесь и далее (U, P) — фиксированная краевая пара) называем краевым, если $Z(F)$ плотно в H (например, P — краевой оператор).*

В этой статье изучается оператор $T : H \to H$, определяемый соотношениями вида

$$D(T) = \{f \in D(L);\ Ff = 0\},\ Tf = Lf + Vf, \tag{1}$$

где V — фиксированное возмущение, а F — фиксированный краевой оператор.

Определение 1.4. *Оператор T вида* (1) *удовлетворяет условию гладкости, если $D(T^*) \subset D(M)$.*

Оправданием такой терминологии служит следующее: если L и M — дифференциальные операторы, а T удовлетворяет условию гладкости, то $D(T)$ и $D(T^*)$ состоят из дифференцируемых функций.

Далее будут указаны условия гладкости для T в терминах V и F и будет описан оператор T^*. Близкие вопросы рассматриваются в [1—4]; обобщение заключается в том, что снято ограничение $\dim D(L)/D(L_0) < \infty$.

2. Почти ограниченные операторы. Пусть G — какое-либо гильбертово пространство.

Определение 2. 1. *Оператор* $A \in B(D[L];G)$ *называется почти ограниченным (относительно* (L_0, L)*), если сужение* $A \mid D(L_0)$ *является* $H \to G$*-ограниченным. Если* A*—почти ограниченный оператор, то оператор* A_1*, являющийся* $H \to G$*-замыканием оператора* $A \mid D(L_0)$*, называется младшей частью, а* $A_0 = A - A_1$ *— старшей частью оператора* A.

Замечание 2.2. Пусть A_0 и A_1 — старшая и младшая части почти ограниченного оператора A. Тогда $A_1 \in \mathcal{B}(H; G)$, а поэтому $A_1^* \in \mathcal{B}(G, H)$. Однако A_0 трактуем как оператор из $\mathcal{B}(D[L]; G)$, так что $A_0^* \in \mathcal{B}(G; D[L])$.

Лемма 2. 3. *Пусть* $A \in \mathcal{B}(D[L]; G)$*, следующие утверждения эквивалентны:* I) A *—почти ограничен;* II) $LR(A^*) \subset D(M)$.

Доказательство. Пусть выполняется I) и A_1 — младшая часть оператора A. Учитывая, что на $D(L_0)$ A и A_1 равны, имеем $\forall f \in D(L_0)$ $\forall g \in G$ $(L_0 f \mid LA^* g)_H = (f \mid A^* g)_{D[L]} - (f \mid A^* g)_H = (A_1 f \mid g)_H - (f \mid A^* g)_H$, так что

$$\forall f \in D(L_0),\ \forall g \in G\ (L_0 f \mid LA^* g)_H = (f \mid A_1^* g - A^* g)_H. \tag{2}$$

Отсюда заключаем, что $\forall g \in G LA^* g \in D(L_0)$, т. е. выполняется II).

Обратно, пусть выполняется II). Тогда $\forall f \in D(L_0)$, $\forall g \in G$ $(Af \mid g)_G = (f \mid A^* g)_{D[L]} = (f \mid A^* g)_H + (L_0 f \mid LA^* g)_H = (f \mid (1 + ML) A^* g)_H$. Отсюда видно, что множество $\{Af : f \in D(L_0),\ \|f\| < 1\}$ слабо ограничено в G. В силу принципа равномерной ограниченности оно сильно ограничено в G. Следовательно, сужение $A \mid D(L_0)$ $H \to G$-ограничено, так что имеет место I).

Замечание 2.4. Если A_1 — младшая часть почти ограниченного оператора $A \in \mathcal{B}(D[L]; G)$, то $A_1^* = (1 + ML) A^*$. Это вытекает из (2).

3. Формула Грина. Непосредственная проверка показывает, что справедливо следующее предложение (см. [1]).

Лемма 3.1. *Сужение оператора* L *на* $D(L) \ominus D(L_0)$ *унитарное (относительно* $(\cdot|\cdot)_{D[L]}$ *и* $(\cdot|\cdot)_{D[M]}$*) отображение на* $D(M) \ominus D(M_0)$*. Обратным к нему является сужение* $-M$ *на* $D(M) \ominus D(M_0)$*. В частности,*

$$D(M) = D(M_0) \oplus L(D(L) \ominus D(L_0)); \tag{3}$$

$$\forall f \in D(L) \ominus D(L_0)\ Lf \in D(M) \ominus D(M_0),\ MLf = -f. \tag{4}$$

В качестве следствия получаем такое предложение.

Предложение 3. 2. *Существует* $Q \in \mathcal{B}(D[L]; U)$ *такое, что* (U, Q) *— краевая пара для* $\langle M_0, M\rangle$ *и*

$$\forall f \in D(L),\ \forall g \in D(M)\ \ (Lf \mid g) - (f \mid Mg) = (Pf \mid Qg). \tag{5}$$

Соотношение (5) называем *формулой Грина.*

Следствие 3.5. *Пусть* U *представлено в виде прямой суммы* $U = U_1 \dot{+} U_2$ *своих замкнутых подпространств* U_1, U_2*. Тогда* $\forall f \in D(L)$, $\forall g \in D(M)$

$$(Lf \mid g)_H - (f \mid Mg)_H = \sum_{i=1}^{2} (P_i f \mid Q_i g), \tag{6}$$

где $P = P_1 \dot{+} P_2$, $Q = Q_1 \dot{+} Q_2$ *— соответствующие прямые разложения операторов* P *и* Q*; в частности,* $\forall f \in D(L)$ $P_i f \in U_i$, $\forall g \in D(M)$ $Q_i g \in U_i$, $i = 1, 2$.

Отметим, что для симметрических операторов с равными дефектными числами интересные разновидности формулы Грина установлены в работе [5].

4. Гладкий краевой оператор. Заметим, что для каждого краевого оператора F $L \mid Z(F) \in \mathfrak{C}(H)$, поскольку $Z(L)$ замкнуто в $D[L]$ и плотно в H.

Определение 4.1. *Краевой оператор* F *удовлетворяет условию гладкости, если* $D((L \mid Z(F))^*) \subseteq D(M)$.

Предложение 4. 2. *Пусть* F *— нормально разрешимый краевой оператор. Следующие условия эквивалентны:* 1) F *удовлетворяет условию гладкости;* 2) F*—почти ограничен.*

Доказательство. Применяя (3) к паре $(L \mid Z(F), L)$, находим

$$D((L \mid Z(F))^*) = D(M_0) \oplus L[D(L) \ominus Z(F)]. \tag{7}$$

Так как по условию F — нормально разрешим, то $D(L) \ominus Z(F) = R(F^*)$. Поскольку $D(M_0) \subset D(M)$, то из (7) заключаем, что $D((L \mid Z(F)^*)) \subset D(M)$ эквивалентно включению $LR(F^*) \subset D(M)$. Остается применить лемму 2.3.

5. Гладкое возмущение. Пусть T — оператор $H \to H$, определяемый соотношениями (1).

Лемма 5.1. *Если $g \in H$, то $g \in D(T^*)$ тогда и только тогда, когда*

$$g + LV^*g \in D((L \mid Z(F))^*). \tag{8}$$

Кроме того,

$$\forall g \in D(T^*) \;\; T^*g = (L \mid Z(F))^*(1 + LV^*)g + V^*g. \tag{9}$$

Доказательство. Если $g \in D(T^*)$, то $\forall f \in D(T) = Z(F) = D(L \mid Z(F))$ $(f \mid T^*g)_H = (Lf \mid g)_H + (Vf \mid g)_H = (Lf \mid g)_H + (f \mid V^*g)_{D[L]} = (Lf \mid g)_H + (f \mid V^*g)_H + (Lf \mid LV^*g)_H$, так что $(f \mid T^*g - V^*g)_H = (Lf \mid g + LV^*g)_H$. Отсюда вытекает, что условие (8) необходимо для того, чтобы $g \in D(T^*)$, и имеет место (9). Просто проверяется и достаточность условия (8).

Определение 5.2. *Возмущение $V \in \mathscr{B}(D[L];\ H)$ удовлетворяет условию гладкости, если для любого краевого оператора F, удовлетворяющего условию гладкости, оператор T, определяемый соотношениями (1), удовлетворяет условию гладкости.*

Предположение 5.3. *Если возмущение $V \in \mathscr{B}(D[L];\ H)$ почти ограничено, то оно удовлетворяет условию гладкости.*

Доказательство. Пусть $V \in \mathscr{B}(D[L];\ H)$— почти ограничено. В силу леммы 2.3 $LR(V^*) \subset D(M)$. Если F —произвольный краевой оператор, удовлетворяющий условию гладкости, то $D((L \mid Z(F))^*) \subset D(M)$. Следовательно, если $g \in D(T^*)$, то в силу (8) $g \in D(M)$.

Замечание 5.4. Как мы видим, для того чтобы возмущение V удовлетворяло условию гладкости, достаточно, чтобы $LV^*H \subset D(M)$. Для этого же необходимым является включение $(1 + LV^*)^{-1} D(M) \subset \subset D(M)$. При этом $(1 + LV^*)^{-1}E$ обозначает полный прообраз множества E при отображении $1 + LV^*$

Действительно, согласно лемме 5.1

$$D(T^*) = (1 + LV^*)^{-1} D(L \mid Z(F))^*), \tag{10}$$

где T, V и F связаны соотношениями (1). Отметим, что основной краевой оператор P удовлетворяет условию гладкости, так как $L \mid Z(P) = L_0$. Поэтому $D((L \mid Z(P))^*) = D(M)$. В силу (10) при $F = P$, $D(T^*) = (1 + LV^*)^{-1} D(M)$, откуда следует наше утверждение.

6. Оператор T. Дадим более детальное описание оператора T. Воспользуемся следующим утверждением, установленным в работе [6].

Предложение 6.1. *Пусть F_0 — нормально разрешимый краевой оператор для (L_0, L), $F_1 \in \mathscr{B}(H;\ U)$ и $R(F_1) \subset R(F_0)$. Тогда $F_0 - F_1$ — нормально разрешимый краевой оператор для (L_0, L), если выполняется хотя бы одно из условий: 1) F_1 — компактный оператор $H \to U$; 2) $\| F_1 \| < \| < (F_0 \mid D(L) \ominus Z(F_0))^{-1} \|^{-1}$.*

Определение 6.2. *Пусть G — какое-либо гильбертово пространство. Оператор $A \in \mathscr{B}(D[L];\ G)$ имеет малый носитель (относительно (L_0, L)), если $D(L_0) \subset Z(A)$.* (Эта терминология оправдывается тем, что оператор, имеющий малый носитель, сосредоточен на подпространстве $D(L) \ominus D(L_0)$, которое можно трактовать как пространство краевых значений).

Теорема 6.3. *Пусть*

$$D(T) = \{f \in D(L) : F_0 f = F_1 f\},\;\; Tf = Lf + V_0 f + V_1 f, \tag{11}$$

где 1) $F_0 \in \mathscr{B}(D(L);\ U)$, $V_0 \in \mathscr{B}(D(L);\ H)$, F_0 *и* V_0 — *операторы с малым носителем, причем* F_0 — *нормально разрешим;* 2) $F_1 \in \mathscr{B}(H;\ U)$, $V_1 \in \mathscr{B}(H)$,

$R(F_1) \subset R(F_0)$ и F_1 удовлетворяет хотя бы одному из условий 1) или 2) *предложения 6. 1. Тогда оператор T удовлетворяет условию гладкости.*

Доказательство. В силу предложения 6.1 $F_0 - F_1$ — нормально разрешим. Очевидно, $F_0 - F_1$ и $V_0 + V_1$ — почти ограниченные операторы. Теперь достаточно учесть утверждения 4.2 и 5.3

7. Оператор T^*. Пусть оператор T задан, как указано в предложении 6.3. Для нахождения T^* воспользуемся тем, что T удовлетворяет условию гладкости.

Определение 7. 1. *Пусть*

$$U_F = P[D(L) \ominus Z(F_0)],\ U_V = P[Z(F_0) \ominus D(L_0)], \tag{12}$$

где $\ominus$ относится к $(\cdot|\cdot)_{D[L]}$. (Легко видеть, что U_F и U_V — замкнутые, линейно независимы подпространства в U и $U = U_F \dot{+} U_V$). Пусть

$$P = P_F \dot{+} P_V,\ Q = Q_F \dot{+} Q_V \tag{13}$$

— прямые разложения, отвечающие разложению $U = U_F + U_V$, так что справедлива формула Грина

$$\forall f \in D(L),\ \forall g \in D(M)\ (Lf|g)_H - (f\,|\,Mg)_H = (P_F f\,|\,Q_F g)_U + (P_V f\,|\,Q_V g)_U. \tag{14}$$

Замечание 7.2. Не ограничивая общности, можно предположить что

$$D(T) = \{f \in D(L) : P_F f = F_1 f\},\ Tf = Lf + \hat{V} P_V f + V_1 f, \tag{15}$$

где

$$F_1 \in \mathscr{B}(H;\ U),\ R(F_1) \subset U_F,\ \hat{V} \in \mathscr{B}(U_V;\ U),\ V_1 \in \mathscr{B}(H;\ U). \tag{16}$$

Действительно, пусть F_0 — оператор, удовлетворяющий условию 1) предложения 6.3. Учитывая, что $Z(F_0) = Z(P_F)$ и применяя лемму «о тройке» (см. [7]), представим F_0 в виде $F_0 = \hat{F} P_F$, где $\hat{F} \in \mathscr{B}(U_F;\ R(F_0))$. Ясно, что $Z(F) = \{0\}$. Принимая во внимание, что $R(F_0)$ замкнуто в U (F_0 —нормально разрешим), заключаем, что $\hat{F}^{-1}$ ограничен. Таким образом, $\{f \in D(L): F_0 f = F_1 f\} = \{f \in D(L) : P_F f = \hat{F}^{-1} F_1 f\}$. Обозначая $\hat{F}^{-1} F_1$ через F_1, мы приходим к представлению $D(T)$ в виде (15), причем F_1 удовлетворяет условиям (16). Преобразуем формулу для Tf. Так как $Z(V_0) \supset D(L_0) = Z(P)$, то $V_0 = \hat{V} P$, где $V_0 \in \mathscr{B}(U)$. Пусть $f \in D(T)$, тогда $V_0 f = \hat{V}_0 P_V f + \hat{V}_0 P_F f = \hat{V}_1 P_V f + \hat{V}_0 F_1 f$, где $\hat{V} = \hat{V}_0 \,|\, U_V$. Поэтому $Tf = Lf + \hat{V} P_V f + (\hat{V}_0 F_1 + V_1) f$. Обозначая $\hat{V}_0 F_1 + V_1$ через V_1, приходим к представлению Tf в виде (15), причем $\hat{V}$ и V_1 удовлетворяют условиям (16).

Замечание 7.3. Пусть выполняются соотношения (15) и, кроме того, хотя бы одно из условий: 1) F_1 — компактный оператор; 2) $\| F_1 \| < \| (P_F \,|\, D(L) \ominus Z(P_F))^{-1} \|^{-1}$. Тогда T удовлетворяет условию гладкости.

Действительно, поскольку P_F — нормально разрешимый оператор, условия теоремы 6.3. выполнены.

Теорема 7.4. *Пусть оператор T задан как в замечании 7.2 и выполнено хотя бы одно из условий 1), 2) замечания 7.3. Тогда*

$$D(T^*) = \{g \in D(M) : Q_V g = -\hat{V}^*_g\},\quad T^* g = Mg + F_1^* Q_P g + V_1^* g. \tag{17}$$

Доказательство. Пусть $f \in D(T)$, $g \in D(T^*)$, тогда $(f\,|\,T^* g) = (Lf\,|\,g)_H + (\hat{V} P_V f\,|\,g)_H + (V_1 f\,|\,g)_H$. Принимая во внимание (14), находим $(f\,|\,T^* g)_H = (f\,|\,Mg)_H + (P_F f\,|\,Q_F g)_U + (P_V f\,|\,Q_v g)_U + (P_V f\,|\,\hat{V}^* g)_U + (f\,|\,V_1^* g)_H$. Учитывая, что $\forall f \in D(T)\ P_F f = F_1 f$, получаем $(P_F f\,|\,Q_F g)_U = (F_1 f\,|\,Q_F g)_U =$

$= (f \mid F_1^* Q_F g)_H$. Поэтому

$$\forall f \in D(T) \quad (f \mid h)_H = (P_V f \mid u)_U, \tag{18}$$

где $h = T^* g - Mg - F_1^* Q_F g - V_1^* g$, $u = Q_V g + \hat{V}^* g \in U_V$. Нужно показать, что $u = 0$ и $h = 0$. Пусть l — функционал, определяемый соотношениями

$$D(l) = D(L), \quad l(f) = (f \mid h)_H - (P_V f \mid u)_U.$$

Согласно (18) $Z(l) \supset D(T) = Z(P_F - F_1)$. Поэтому согласно лемме «о тройке» и теореме Рисса о представлении существует $v \in U$ такое, что $\forall f \in D(L)$ $(f \mid h)_H - (P_V f \mid u)_U = l(f) = ((P_F - F_1) f \mid v)_U$, или

$$\forall f \in D(L) \ (f \mid h + F_1^* v)_H = (P_V f \mid u)_U + (P_F f \mid v)_U. \tag{19}$$

Предположим, что существует $f_0 \in D(L)$ такое, что $(P_V f_0 \mid u)_U + (P_F f_0 \mid v)_U \neq \neq 0$. Тогда правая часть равенства (19) — ненулевой функционал от f. Этот функционал $\|\cdot\|_H$-неограничен, ибо он равен нулю на плотном в H подпространстве $D(L_0)$. Но левая часть равенства (19) — $\|\cdot\|_H$-ограниченный функционал от f. Полученное противоречие показывает, что $\forall f \in D(L)$ $(P_V f \mid u)_U + (P_F f \mid v)_U = 0$. Отсюда, учитывая то, что $u \in U_V$ и прямое разложение $P = P_V \dot{+} P_F$ отвечает прямому разложению $U = U_V \dot{+} U_F$, заключаем, что $u = 0$. Теперь из (18) следует, что $h = 0$. Непосредственная проверка показывает, что $g \in D(T^*)$, если $g \in D(M)$ и $Q_V g = -\hat{V}^* g$.

Замечание 7.5. Пусть оператор T задан, как в замечании 7.2 и выполняется хотя бы одно из условий 1) 2) замечания 7.3. Если выполнено хотя бы одно из условий 1) $\hat{V}$ — компактный оператор; 2) $\|\hat{V}\| < < \|(Q_V \mid D(M) \ominus Z(Q_V))^{-1}\|^{-1}$, то $T \in \mathfrak{C}(H)$. Действительно, в этом случае можно применить теорему 7.4 и получить $T^{**} = T$.

1. *Лянце В. Э.* О замкнутых операторах в гильбертовом пространстве.— Теория функций, функцион. анализ и их прил., 1972, вып. 16, с. 165—186.
2. *Aronszajn N., Brown R. D.* Finite-dimensional perturbations of spectral problems and variational approximations methods for eigen value problems.— Stud. math., 1970, **36**, N 1, p. 1—70.
3. *Верник А. Н.* О конечномерных возмущениях линейных отношений в банаховых пространствах.— Функцион. анализ, 1977, вып. 9, с. 17—22.
4. *Coddinton E. A.* Self-adjoint subspace extensions of nondensely defined symmetric operators.— Adv. Math., 1974, **14**, N 3, p. 309—332.
5. *Кочубей А. Н.* О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.— Мат. заметки, 1975, **17**, вып. 1, с. 41—48.
6. *Лянце В. Е., Сторож О. Г.* Про збурення крайового оператора.— Вісн. Львів. ун-ту, Сер. мех.-мат., 1979, вип. 14, с. 18—21.
7. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа.— М.: Наука, 1976.— 542 с.

Львовский государственный университет
Институт прикладных проблем
механики и математики АН УССР

Поступила в редакцию
26.11.1979 г.