УДК 517.5

И. М. Гальперин

Некоторые оценки для функций Мию

Настоящая заметка является дальнейшим развитием работы [1].

Обозначим через $S(\delta, 1)$ класс регулярных в круге $|z|<1$ функций $f(z)\neq 0$, удовлетворяющих в нем условию $0<\delta\leqslant|f(z)|<1$ (класс Мию, [2]). Так как $f(z)\neq 0$ в $|z|<1$, то функция $F(z)=\ln 1/f(z)$ также регулярна в $|z|<1$, причем $0<\ln(1/|f(z)|)\leqslant\ln(1/\delta)$.

Пусть $f(0)=a_0=|a_0|e^{i\beta}$. Тогда $F(0)=\ln(1/|a_0|)-i\beta$ и $0<\ln(1/|a_0|)\leqslant\leqslant\ln(1/\delta)$. Функция $w=\Phi(z)$, отображающая круг $|z|<1$ на полосу $0<\operatorname{Re} w<\ln(1/\delta)$ и переводящая точку $z=0$ в точку $w=\ln(1/|a_0|)-i\beta$, имеет вид

$$\Phi(z)=\ln\frac{1}{|a_0|}-i\beta+\frac{i\ln\delta}{\pi}\ln\frac{1-ze^{-i\alpha}}{1-ze^{i\alpha}},\quad \alpha=\pi\frac{\ln|a_0|}{\ln\delta},\quad \alpha\in(0,\pi). \tag{1}$$

Рассмотрим функции

$$F_1(z)=F(z)-\ln(1/|a_0|)+i\beta,\quad \Phi_1(z)=\Phi(z)-\ln(1/|a_0|)+i\beta.$$

Очевидно, функция $\psi(z)=\Phi_1^{-1}(F_1(z))$ регулярна в $|z|<1$ $\psi(0)=0$, $|\psi(z)|<1$, $|\psi(z)|\leqslant|z|$. Следовательно, $\Phi_1(\psi(z))=F_1(z)$, откуда

$$F(z)=\ln\frac{1}{f(z)}=\ln\frac{1}{|a_0|}-i\beta+\frac{i\ln\delta}{\pi}\ln\frac{1-\psi(z)e^{-i\alpha}}{1-\psi(z)e^{i\alpha}},$$

$$f(z)=a_0\left(\frac{1-\psi(z)e^{i\alpha}}{1-\psi(z)e^{-i\alpha}}\right)^{\frac{i\ln\delta}{\pi}}. \tag{2}$$

Формула (2) выражает необходимое и достаточное условие принадлежности функции $f(z)$ классу $S(\delta, 1)$. Принимая во внимание, что $\psi(z)=$ $=(p(z)-1)/(p(z)+1)$, где $p(z)$ принадлежат классу C-функций

$$p(z)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1+ze^{-it}}{1-ze^{-it}}\,d\mu(t),\quad \mu(t)\uparrow(-\pi,\pi),\quad \mu(\pi)-\mu(-\pi)=2\pi,$$

после несложных преобразований находим другое выражение для

$$f(z)=\frac{a_0}{|a_0|}\left(\frac{i\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}+p(z)}{i\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}-p(z)}\right)^{\frac{i\ln\delta}{\pi}} \tag{3}$$

при $\delta\to+0$ из этой формулы получается структурная формула (5) из [1].

Пусть

$$f(z)=a_0+a_1z+a_2z^2+\ldots+a_nz^n+\ldots,$$

$$f'(z)=a_1+2a_2z+3a_3z^2+\ldots+na_nz^{n-1}+\ldots,$$

$$p(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + c_3 z^3 + \dots + c_n z^n + \dots,$$

$$p^2(z) = 1 + 2c_1 z + (c_1^2 + 2c_2) z^2 + 2c_1 c_2 z^3 + \dots,$$

$$p'(z) = c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots,$$

где, как известно,

$$|c_k| \leqslant 2, \quad k = 1, 2, 3, \dots; \tag{4}$$

$$|2c_2 - c_1^2| \leqslant 4 - |c_1|^2. \tag{5}$$

Из (3) находим $f'(z)\left(\operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} + p^2(z)\right) = 2\pi^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \ln \delta\, p'(z)\, f(z)$ или

$$(a_1 + 2a_2 z + 3a_3 z^2 + \dots)\left((\operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} + 2c_1 z + (c_1^2 + 2c_2) z^2 + \dots\right) = 2\pi^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \times$$

$$\times \ln \delta (c_1 + 2c_2 z + 3c_3 z^2 + \dots)(a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots).$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z в правой и левой частях последнего равенства, находим

$$a_1 = \pi^{-1} \sin \alpha \ln \delta\, a_0 c_1; \tag{6}$$

$$2a_1 c_1 + 2a_2 \operatorname{cosec}^2 \frac{\alpha}{2} = 2\pi^{-1} \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} \ln \delta (a_1 c_1 + 2a_0 c_2),$$

$$a_2 = (2\pi)^{-1} \sin \alpha \ln \delta a_0 [(2c_2 - c_1^2) + c_1^2 (\cos \alpha + \pi^{-1} \sin \alpha \ln \delta)]. \tag{7}$$

Из (6) с учетом (4) получаем $|a_1| \leqslant 2\pi^{-1} \sin \alpha \ln (1/\delta\, |a_0|)$. Это точная оценка. Она реализуется функцией (3) с $p(z) = (1 + ze^{-it})/(1 - ze^{-it})$.

Из (7) с учетом (5) находим

$$|a_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} |a_0| \left[|2c_2 - c_1^2| + |c_1|^2 \left| \cos \alpha - \frac{1}{\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} \right| \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} |a_0| \left[4 - |c_1|^2 + |c_1|^2 \left| \cos \alpha - \frac{1}{\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} \right| \right].$$

1) Пусть $\cos \alpha - \pi^{-1} \sin \alpha \ln (1/\delta) < 0$ (т. е. $\operatorname{ctg} \alpha < \pi^{-1} \ln (1/\delta)$), тогда

$$|a_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} |a_0| \left[4 - |c_1|^2 + |c_1|^2 \left(\frac{1}{\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} - \cos \alpha \right) \right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} |a_0| \left[4 + |c_1|^2 \left(\frac{1}{\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} - 1 - \cos \alpha \right) \right].$$

а) $\pi^{-1} \sin \alpha \ln (1/\delta) - 1 - \cos \alpha > 0$ (т. е. $\operatorname{ctg} \alpha/2 < \pi^{-1} \ln 1/\delta$). С учетом (4) получаем $|a_2| \leqslant 2\pi^{-1} \sin \alpha \ln 1/\delta\ |a_0| (\pi^{-1} \sin \alpha \ln 1/\delta - \cos \alpha)$. Это точная оценка. Она реализуется функцией (3) с $p(z) = (1 + ze^{-it})/(1 - ze^{-it})$.

б) $\pi^{-1} \sin \alpha \ln (1/\delta) - 1 - \cos \alpha \leqslant 0$ (т. е. $\operatorname{ctg} (\alpha/2) \geqslant \pi^{-1} \ln (1/\delta) > \operatorname{ctg} \alpha$). Тогда

$$|a_2| \leqslant \frac{1}{2\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} |a_0| \left[4 + |c_1|^2 \left(\frac{1}{\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} - 1 - \cos \alpha \right) \right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi} \sin \alpha \ln \frac{1}{\delta} |a_0|.$$

Здесь знак равенства будет только при $|c_1|^2 = 0$, но тогда $|c_2| = 2$. Экстремальной в этом случае будет функция (3) с $p(z)$, имеющей $\mu(t)$ с двумя одинаковыми скачками, каждый из которых равен 1/2, скажем, в точках $t = 0$ и $t = \pi$. Тогда $p(z) = z^2/(1 - z^2)$.

2) Пусть $\cos\alpha - \pi^{-1}\sin\alpha\ln(1/\delta) \geqslant 0$ (т. е. $\operatorname{ctg}\alpha \geqslant \pi^{-1}\ln(1/\delta)$), тогда

$$|a_2| \leqslant \frac{1}{2\pi}\sin\alpha\ln\frac{1}{\delta}|a_0|\left[4 - |c_1|^2 + |c_1|^2\left(\cos\alpha - \frac{1}{\pi}\sin\alpha\ln\frac{1}{\delta}\right)\right] =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\sin\alpha\ln\frac{1}{\delta}|a_0|\left[4 - |c_1|^2\left(\frac{1}{\pi}\sin\alpha\ln\frac{1}{\delta} + 1 - \cos\alpha\right)\right] \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2}{\pi}\sin\alpha\ln\frac{1}{\delta}|a_0|.$$

Мы вернулись к рассмотренному выше случаю.

Полученные результаты можно сформулировать в виде следующей теоремы.

Теорема. *Для функций $f(z) \in S(\delta, 1)$ имеют место точные оценки*

$$|a_1| \leqslant \frac{2}{\pi}\sin\alpha\ln\frac{1}{\delta}|a_0|,$$

$$|a_2| \leqslant \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\sin\alpha\ln\dfrac{1}{\delta}|a_0|\left(\dfrac{1}{\pi}\sin\alpha\ln\dfrac{1}{\delta} - \cos\alpha\right), & \dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{1}{\delta} > \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}, \\ \dfrac{2}{\pi}\sin\alpha\ln\dfrac{1}{\delta}|a_0|, & 0 < \dfrac{1}{\pi}\ln\dfrac{1}{\delta} \leqslant \operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}, \end{cases}$$

реализуемые функциями этого же класса (см. выше).

Оценим $|a_0 + a_1|$ сверху. Имеем

$$|a_0 + a_1| = |a_0 - \pi^{-1}\sin\alpha\ln(1/\delta)\,a_0c_1| \leqslant |a_0|(1 + 2\pi^{-1}\sin\alpha\ln(1/\delta)),$$

$$\ln(1/|a_0|) = \alpha N, \quad N = \pi^{-1}\ln(1/\delta) > 0, \quad |a_0| = e^{-\alpha N}.$$

Исследуя на экстремум функцию

$$\varphi(\alpha) = e^{-\alpha N}(1 + 2N\sin\alpha), \tag{8}$$

устанавливаем, что она достигает максимума при

$$\sin\alpha = M = 2(\sqrt{4N^2+3} + 2N)/1 + (\sqrt{4N^2+3} + 2N)^2.$$

Подставляя это значение в (8), получаем

$$\max|a_0 + a_1| \leqslant e^{-N\arcsin M}(1 + 2MN).$$

Далее заметим, что, если $f(z) \in S(\delta, 1)$, то $\ln(1/f(z))$ есть такая регулярная в $|z| < 1$ функция, которая «подчинена» функции $\Phi(z)$, однолистно отображающей круг $|z| < 1$ на полосу $0 < \operatorname{Re}\Phi(z) < \ln(1/\delta)$, поэтому ясно, что оценки на $|z| = r < 1$, для $|F(z)|$, $\operatorname{Re}F(z)$, $\operatorname{Im}F(z)$, $\arg F(z)$, где $F(z) = \ln(1/f(z))$ реализуется «подчиняющей» функцией $\Phi(z)$ (1), и вопрос сводится к непосредственному вычислению этих оценок. Ввиду их громоздкости приведем здесь наиболее простую из них

$$\exp\left(-\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\delta}\operatorname{arctg}\frac{r\sin\alpha}{1 - r\cos\alpha}\right) \leqslant \left|\frac{f(z)}{a_0}\right| \leqslant \exp\left(\frac{2}{\pi}\ln\frac{1}{\delta}\operatorname{arctg}\frac{r\sin\alpha}{1 + r\cos\alpha}\right).$$

1. *Гальперин И. М.* Некоторые оценки для ограниченных в единичном круге функций.— Успехи мат. наук, 1965, 20, вып. 1, с. 197—202.
2. *Математика* в СССР за тридцать лет (1917—1947).— М.: Гостехиздат, 1948.— 1044 с.

Киевский
автодорожный институт

Поступила в редакцию
08.01.1981 г.