УДК 513.88+513.83.517

С. В. Тищенко

Спектральное представление счетно-параметрических полугрупп

Спектральное представление однопараметрических полугрупп операторов в гильбертовом пространстве восходит к работам Надя и Хилле. Для неограниченных операторов одним из первых в этом направлении был получен результат [1], который приведем в эквивалентной форме, удобной для обобщения. Имеется семейство самосопряженных операторов $(T_x)_{x\in R^1_+}$, $R^1_+=(0,\infty)$, действующих в гильбертовом пространстве H_0, непрерывно зависящих от x и удовлетворяющих операторному функциональному уравнению $T_{x+y}=T_xT_y$, $x, y\in R^1_+$. Тогда существует разложение пространства H_0 в ортогональную сумму $H_0=H_1\oplus H_2$, в которой H_1 и H_2 — инвариантные относительно T_x, $x\in R^1_+$, подпространства, такое, что в H_2 операторы полугруппы действуют как нулевой, а в H_1 допускают спектральное представление

$$T_x=\int\limits_{R^1} e^{\lambda x}dE(\lambda),\ \ x\in R^1_+,$$

где $R^1=(-\infty,\infty)$, E — некоторое разложение единицы.

Спектральное представление для семейства операторов, связанных общими функциональными или дифференциальными условиями (в частности, групповыми), дано в работе [2]. Настоящая работа является продолжением статьи [3], в которой на основании [2, 4] получено спектральное представление некоторой бесконечномерной сжимающей полугруппы самосопряженных операторов. Результаты [3] обобщаются на случай неограниченных операторов, а также на более общее индексирующее множество.

Пусть X — вещественное сепарабельное гильбертово пространство с ортонормированным базисом $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ и скалярным произведением $(.,.)_X$;

$H_0 \supseteq H_{\pm} \supseteq D$ — цепочка, в которой H_0 и H_+ — комплексные сепарабельные гильбертовы пространства, причем вложение $H_+ \to H_0$ квазиядерно (H_+ плотно в H_0); D — проективный предел гильбертовых пространств, плотно топологически вложенный в H_+. Обозначим

$$X^+ = \left\{ x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k e_k \in X \mid x_k > 0,\ k = 1, 2, \ldots \right\}.$$

Рассмотрим полугруппу самосопряженных операторов $(A_x)_{x \in X^+}$, действующих в H_0. Предположим, что существует цепочка $H_0 \supseteq H_+ \supseteq D$ такая, что: 1) $D \subseteq \bigcap\limits_{x \in X^+} D(A_x)$ ($D(A_x)$ — область определения оператора A_x) и сужение A_x на D действует непрерывно из D в H_+ для любого $x \in X^+$; 2) вектор-функция $X^+ \ni x \to A_x u \in H_+$ слабо непрерывна при каждом $u \in D$.

Теорема 1. *Пусть $(A_x)_{x \in X^+}$ — полугруппа самосопряженных операторов, действующих в H_0. Существует разложение пространства H_0 в ортогональную сумму $H_0 = H_1 \oplus H_2$ инвариантных относительно A_x, $x \in X^+$, подпространств такое, что в H_2 операторы полугруппы действуют как нулевой, а в H_1 допускают спектральное представление*

$$A_x = \int\limits_X e^{(\mu, x)_X} dE(\mu),\ x \in X^+, \tag{1}$$

где E — некоторое разложение единицы на σ-алгебре $B(X)$ борелевских множеств из X, в том и только в том случае, когда существует цепочка $H_0 \supseteq H_+ \supseteq D$ такая, что выполняются условия 1) и 2). Разложение единицы E в (1) однозначно определяется по семейству $(A_x)_{x \in X^+}$.

Наметим доказательство.

Достаточность. Обозначим через M^+ множество вещественнозначных непрерывных функций $\varphi(\cdot)$ на X^+, удовлетворяющих функциональному уравнению $\varphi(x+y) = \varphi(x)\varphi(y)$ ($x, y \in X^+$), через E_1 — модифицированное регуляризованное разложение единицы семейства $(A_x)_{x \in X^+}$ (см. [4]) на M^+, H_2 — область значений оператора $E_1(\{0\})$, H_1 — ортогональное дополнение в H_0 к H_2. Из того, что $(A_x)_{x \in X^+}$ является полугруппой, а также из условий 1) и 2) заключаем, что регуляризованные собственные значения $\lambda(\cdot) \in M^+$ (см. [2]). Поэтому, по общей спектральной теореме (см. [2, 4])

$$A_x = \int\limits_{M^+} \lambda(x)\, dE_1(\lambda(\cdot)),\ x \in X^+. \tag{2}$$

Оказывается [3], что $\lambda(\cdot) \in M^+$ имеют вид $\lambda(\cdot) = \exp(\mu, \cdot)_X$ ($\mu \in X$) или $\lambda(\cdot) = 0$. Нетрудно убедиться в том, что подпространства H_1 и H_2 приводят операторы A_x, $x \in X^+$. Пусть $A_x^{(1)}$ и $A_x^{(2)}$ — сужения оператора A_x соответственно на подпространства H_1 и H_2 при каждом $x \in X^+$. Тогда семейство $(A_x^{(1)})_{x \in X^+}$, действующее в H_1, допускает в силу (2) представление

$$A_x^{(1)} = \int\limits_{M^+ \setminus \{0\}} \lambda(x)\, dE_1(\lambda(\cdot)),\ x \in X^+. \tag{3}$$

Если через E обозначить разложение единицы, полученное из E_1 преобразованием $M^+ \setminus \{0\} \ni \lambda(\cdot) = \exp(\mu, \cdot)_X \mapsto \mu \in X$, то (3) можно переписать в виде

$$A_x^{(1)} = \int\limits_X e^{(\mu, x)_X} dE(\mu),\ x \in X^+. \tag{4}$$

Поэтому, представление (2), действующее в $H_1 \oplus H_2 = H_0$, будет иметь требуемый вид.

Необходимость. Для того чтобы построить цепочку $H_0 \supseteq H_+ \supseteq \supseteq D$ для семейства $(A_x)_{x\in X^+}$ в H_0, достаточно построить цепочку $H_1 \supseteq \supseteq H_{1,+} \supseteq D_1$ для семейства $(A_x^{(1)})_{x\in X^+}$ по представлению (4) в H_1. С использованием пространств $A_\tau\,(R^\infty)\,(R^\infty = R^1 \times R^1 \times \ldots)$, введенных и исследованных в [5], а также теоремы 4.3 из [4], такая цепочка была построена в работе [3], причем для нее выполнялись условия типа 1) и 2). Нетрудно проверить, что цепочка $H_0 = H_1 \oplus H_2 \supseteq H_+ = H_{1,+} \oplus H_2 \supseteq D = = D_1 \oplus H_2$ будет требуемой.

Замечания. 1. Представление (1) можно получить, используя цепочку $H_0 \supseteq \Phi$, где Φ — сепарабельное ядерное пространство, плотное в H_0, причем включение $\Phi \subseteq H_0$ топологическое. При этом предполагается, что семейство $(A_x)_{x\in X^+}$ удовлетворяет условиям (более простым по сравнению с 1) и 2)): 1′) $\Phi \subseteq \bigcap\limits_{x\in X^+} D(A_x)$ и для каждого $x \in X^+$ сужение A_x на Φ действует непрерывно из Φ в Φ, 2′) вектор-функция $X^+ \ni x \to A_x u \in \in \Phi$ слабо непрерывна при каждом $u \in \Phi$.

2. Если в качестве индексирующего множества взять $K \setminus \{0\}$, где K — произвольный выпуклый воспроизводящий конус [6] в X, то можно доказать теорему, аналогичную теореме 1. Формулировка будет отличаться тем, что X^+ в теореме 1 заменится на $K \setminus \{0\}$.

3. Теорема 1 допускает обобщение на полугруппы нормальных операторов.

Обозначим через l_p пространство вещественных последовательностей, суммируемых по модулю в p-й степени, l_q — его сопряженное пространство ($p \in [1, 2]$).

Теорема о спектральном представлении группы самосопряженных операторов, индексированной элементами всего пространства X, подобная теореме 1, имеется в [2]. Приведенный ниже результат по форме примыкает к этой теореме, однако условия формулируются в других терминах и являются лишь достаточными. С другой стороны, оказывается, что можно предполагать только эрмитовость рассматриваемых операторов, их самосопряженность в существенном получается автоматически. Для однопараметрического случая аналогичный результат содержится в [7].

Теорема 2. *Пусть $(S_\alpha)_{\alpha\in l_q}$ — счетно-параметрическое семейство симметрических операторов в H_0 и F — плотное линейное многообразие в H_0 такое, что:*

1) $F \subseteq D(S_\alpha S_\beta)$; $\alpha, \beta \in l_q$;

2) $S_\alpha S_\beta y = S_{\alpha+\beta} y$; $\alpha, \beta \in l_q$; $y \in F$;

3) $S_0 y = y$; $y \in F$;

4) *при каждом* $y \in F$ *функция* $(S_\alpha y, y)_{H_0}$ *непрерывна в* 0 *в* J_q-*топологии.*

Тогда операторы S_α, $\alpha \in l_q$ *самосопряжены в существенном, коммутируют и допускают спектральное представление*

$$\tilde{S}_\alpha = \int\limits_{l_p} e^{\langle \alpha, \lambda \rangle} dE(\lambda), \quad \alpha \in l_q,$$

где $\tilde{S}_\alpha$ — *замыкание оператора* S_α *при каждом* $\alpha \in l_q$, E — *некоторое разложение единицы на* σ-*алгебре* $B(l_p)$ *борелевских множеств из* l_p, $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ — *двойственность между* l_p *и* l_q.

J_q-Топологией в l_q называется топология, задаваемая окрестностями нуля вида $\{x \in l_q \mid (Bx, x) < 1\}$, где B — неотрицательные диагональные операторы, действующие по закону $l_q \ni x \to Bx = (b_n x_n)_{n=1}^\infty \in l_p\ (b_n \geqslant 0)$, для которых $\sum\limits_{n=1}^\infty b_n^{p/2} < \infty$.

1. *Devinatz A.* A note on semi-groups of unbounded self-adjoint operators.— Proc. Amer. Math. Soc., 1954, 5, p. 101—102.
2. *Березанский Ю. М.* Спектральные представления решений некоторых классов функциональных и дифференциальных уравнений.— Докл. АН УССР, 1978, № 7, с. 579—583.
3. *Тищенко С. В.* Спектральное представление некоторой бесконечномерной сжимающей полугруппы самосопряженных операторов.— В кн.: Операторы математической физики и бесконечномерный анализ. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 115—120.
4. *Березанский Ю. М.* Самосопряженные операторы в пространствах функций бесконечного числа переменных.— Киев: Наук. думка, 1978.— 360 с.
5. *Кондратьев Ю. Г., Самойленко Ю. С.* Интегральное представление положительно определенных обобщенных ядер бесконечного числа переменных.— Докл. АН СССР, 1976, **227**, № 4, с. 800—803.
6. *Крейн С. Г.* Функциональный анализ.— М.: Наука, 1972.— 544 с.
7. *Nussbaum A.* Spectral representation of certain one-parametric families of symmetric operators in Hilbert space.— Trans. Amer. Math. Soc., 1970, **152**, N 2, p. 419—429.

Киевский государственный
университет

Поступила в редакцию
18.05. 1981 г.