УДК 517.5+517.95

М. М. Маламуд

Дифференциальные свойства функций и коэрцитивность в пространствах с равномерной нормой

Приведем примеры функций, имеющих все непрерывные производные порядка не выше r, кроме одной, и изучим коэрцитивность системы дифференциальных операторов с постоянными и переменными коэффициентами в в пространствах $C^{l_1,l_2,\ldots,l_s}(\Omega)$ и $W_\infty^{l_1,l_2,\ldots,l_s}(\Omega)$.

Используем следующие обозначения: $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n)$ — векторы с неотрицательными целочисленными компонентами $\alpha_i,\beta_i\geqslant 0$, $|\alpha|=\alpha_1+\alpha_2+\ldots+\alpha_n$; $l=(l_1,l_2,\ldots,l_s)$ — вектор с натуральными компонентами $l_i>0$; Ω — открытое множество в R^n; $\overline{\Omega}$ — его замыкание; $W_\infty^l(\Omega)$ — соболевское пространство функций $(W_\infty^0(\Omega)=L_\infty(\Omega))$; $C^l(\Omega)$ — банахово пространство функций, непрерывно l раз дифференцируемых в $\overline{\Omega}$; $(C^0(\Omega)=C(\Omega))$; $W_\infty^{l_1,l_2,\ldots,l_s}(\Omega)=\prod_{i=1}^{s}W_\infty^{l_i}(\Omega)=\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$ — соболевское пространство вектор-функций $f=(f_1,f_2,\ldots,f_s)$, где $f_i\in W_\infty^{l_i}(\Omega)$ с нормой

$$\|f\|_{\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)}=\sum_{i=1}^{s}\|f_i\|_{W_\infty^{l_i}(\Omega)};$$

$C^{l_1,l_2,\ldots,l_s}(\Omega)=\prod_{i=1}^{s}C^{l_i}(\Omega)=\Pi C^{l_i}(\Omega)$ — замкнутое подпространство пространства $\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$, где $f_i\in C^{l_i}(\Omega)$, $1\leqslant i\leqslant s$.

В пространстве вектор-функций $\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$ рассмотрим дифференциальные операторы

$$P_j(x,D)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{|\beta|\leqslant l_i}c_{ji\beta}(x)D^\beta f_i(x)=\sum_{i=1}^{s}P_j^i(x,D)f_i(x); \tag{1}$$

$$Q(x,D)=\sum_{i=1}^{s}\sum_{|\beta|\leqslant l_i}b_{i\beta}(x)D^\beta f_i(x)=\sum_{i=1}^{s}Q^i(x,D)f_i(x), \tag{2}$$

где $D=(D_1,D_2,\ldots,D_n)=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\frac{\partial}{\partial x_2},\ldots,\frac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $D^\beta g(x)=D_1^{\beta_1},\ldots,D_n^{\beta_n}g(x)$. Через $P_j(D)$ и $Q(D)$ обозначим операторы $P_j(x,D)$ и $Q(x,D)$ вида (1) и (2), если их коэффициенты $c_{ji\beta}(x)$ и $b_{i\beta}(x)$ постоянны. Пусть $P_{ji}(x,D)$ и $Q_i(x,D)f_i$ — главные части соответствующих слагаемых $P_j^i(x,D)$ и $Q^i(x,D)$ из (1) и (2), т. е.

$$P_{ji}(x,D)f_j=\sum_{|\beta|=l_i}c_{ji\beta}(x)D^\beta f_i(x),\quad Q_i(x,D)f_i=\sum_{|\beta|=l_i}b_{i\beta}(x)D^\beta f_i(x), \tag{3}$$

а $P_{ji}(x,\xi)=\sum_{|\beta|=l_i}c_{ji\beta}(x)\xi^\beta$, $Q_i(x,\xi)=\sum_{|\beta|=l_i}b_{i\beta}(x)\xi^\beta$ — их символы.

Считая дифференциальные мономы D^β, где $\beta=l_i$, упорядоченными лексикографически, рассмотрим матрицу коэффициентов системы операторов $\{P_{ij}(D)\}$, $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant i \leqslant s$, вида (4)

$$A = \begin{pmatrix} \{c_{11\beta}\}, & \{c_{12\beta}\}, \ldots, \{c_{1s\beta}\} \\ \{c_{21\beta}\}, & \{c_{22\beta}\}, \ldots, \{c_{2s\beta}\} \\ \{c_{N1\beta}\}, & \{c_{N2\beta}\}, \ldots, \{c_{Ns\beta}\} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Здесь $\{c_{ji\beta}(x)\}$ при фиксированных i и j — вектор-строка коэффициентов оператора $P_{ji}(x, D)$ длины $r_i = \binom{l_i + n - 1}{n - 1}$, причем D^β упорядочены лексикографически. Заметим, что матрица A имеет размеры $N \times R$, где

$$R = \sum_{i=1}^{s} r_i = \sum_{i=1}^{s} \binom{l_i + n - 1}{n - 1} \tag{5}$$

$\Bigl($напомним, что существует $\binom{k + n - 1}{n - 1}$ различных частных производных порядка k у функции $f(x_1, \ldots, x_n) \in C^k(\Omega)$, n — число переменных$\Bigr)$.

Для целочисленного вектора $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, $\alpha_i \geqslant 0$, $|\alpha| = r$, рассмотрим функцию

$$f_\alpha^r(x) = f^r_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \frac{x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \ldots x_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \, \alpha_2! \ldots \alpha_n!} \ln\ln \frac{k^2}{x_1^2 + \ldots + x_n^2}, \tag{6}$$

где k выбрано так, что $\Omega \in S_k$, S_k — шар радиуса k (примеры функций $f_\alpha^r(x)$ и $\psi_\alpha^{r,m}(x)$ построены автором совместно с Г. М. Маккауи). Нетрудно убедиться, что для любого целочисленного вектора $\beta \neq \alpha$ с неотрицательными компонентами и $|\beta| \leqslant r$

$$D^\beta f_\alpha^r(x) = D^{\beta_1 \beta_2 \ldots \beta_n} f^r_{\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in C(\Omega). \tag{7}$$

В то же время $D^\alpha f_\alpha^r(x) \notin L_\infty(\Omega) \supset C(\Omega)$, если $0 \in \Omega$. Точнее,

$$D^\alpha f^r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) = \ln\ln [k^2 (x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1}] + \varphi^r_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n), \tag{8}$$

где $\varphi_{\alpha_1 \ldots \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) \in C(\Omega)$.

Более общий пример функции с такими свойствами получим, рассматривая

$$\psi^{r,m}_{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n}}{\alpha_1! \ldots \alpha_n!}, \ln\ln \frac{k^2}{x_1^{2m} + \ldots + x_n^{2m}}.$$

Наш пример функции $f_\alpha^r(x)$ вида (6) является обобщением примера В. И. Юдовича [1] и совпадает с ним в случае $n = 2$, $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$.

Предложение 1. *Пусть для операторов с постоянными коэффициентами $P_j(D)$ и $Q(D)$ вида (1) и (2) справедливо неравенство*

$$\| Q(D) f \|_{C(\Omega)} \leqslant k \sum_{j=1}^{N} \| P_j(D) f \|_{C(\Omega)} \tag{9}$$

с константой k, не зависящей от $f \in C^{l_1, \ldots, l_n}(\Omega)$. Тогда существуют комплексные числа λ_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, такие, что одновременно для всех i, $1 \leqslant i \leqslant s$, справедливы равенства

$$Q_i(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j P_{ji}(\xi). \tag{10}$$

Доказательство. Не нарушая общности, считаем, что $0 \in \Omega$. Заметим, что неравенство (9), справедливое по условию $\forall f \in C^{l_1 \ldots l_n}(\Omega)$, продолжается по непрерывности на все функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, для которых конечна правая часть (9). Пусть A — матрица коэффициентов вида (4) системы операторов $\{P_{ji}(D)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant N$; B — матрица коэффициентов операторов $\{P_{ji}(D), Q_i(D)\}$, $1 \leqslant i \leqslant s$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Тогда

$$B = \begin{pmatrix} \{c_{11\beta}\}, & \{c_{12\beta}\}, \ldots, \{c_{1s\beta}\} \\ \{c_{N1\beta}\}, & \{c_{N2\beta}\}, \ldots, \{c_{Ns\beta}\} \\ \{b_{1\beta}\}, & \{b_{2\beta}\}, \ldots, \{b_{s\beta}\} \end{pmatrix}, \tag{11}$$

где $\{b_{i\beta}\}$ — вектор-строка коэффициентов оператора $Q_i(D)$. Размеры матрицы B — $(N+1) \times R$, где R — определяется равенством (5). Если $\operatorname{Rg} A \neq \operatorname{Rg} B$ ($\operatorname{Rg} A$ — ранг матрицы A), то $\operatorname{Rg} B = \operatorname{Rg} A + 1$. Поэтому найдется ненулевой вектор-столбец μ ($\mu^* = (\{\mu_{1\beta}\}, \{\mu_{2\beta}\}, \ldots, \{\mu_{s\beta}\})$) такой, что $A\mu = 0$, $B\mu \neq 0$, т. е.

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta|=l_i} c_{ji\beta}\mu_{i\beta} = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant N; \tag{12}$$

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta|=l_i} b_{i\beta}\mu_{i\beta} \neq 0. \tag{13}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta|=l_i} \mu_{i\beta} f_{\beta}^{l_i}(x). \tag{14}$$

Тогда

$$(P_j(D)g)(x) = \sum_{|\beta|=l_i} c_{ji\beta} D^{\beta} g(x) + \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta|<l_i} c_{ji\beta} D^{\beta} g(x). \tag{15}$$

Если $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — соответственно первое и второе слагаемые в (15), то из (7), ясно, что $g_2(x) \in C(\Omega)$. Далее, ввиду (8)

$$g_1(x) = \left[\sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta|=l_i} c_{ji\beta}\mu_{i\beta}\right] \ln\ln[k^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1}] + \varphi(x_1, \ldots, x_n),$$

где $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in C(\Omega)$. Из (12) ясно, что $g_1(x) = \varphi(x) \in C(\Omega)$. Поэтому правая часть в (9) конечна. Аналогично, представляя $Q(D)g$ в виде суммы двух слагаемых $Q(D)g = \tilde{g}_1(x) + \tilde{g}_2(x)$, находим, что

$$\tilde{g}_1(x) = \left[\sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta|=l_i} b_{i\beta}\mu_{i\beta}\right] \ln\ln[k^2(x_1^2 + \ldots + x_n^2)^{-1}] + \varphi_1(x_1, \ldots, x_n)$$

и $\varphi_1(x) \in C(\Omega)$. Однако теперь ввиду (13) $\tilde{g}_1(x) \notin L_\infty(\Omega) \supset C(\Omega)$. Поэтому $\| Q(D)g \|_{L_\infty(\Omega)} = \| Q(D)g \|_{C(\Omega)} = \infty$. Полученное противоречие и доказывает предложение.

Следствие 1. *Если для операторов $P_j(D)$ и $\tilde{Q}(D)$ вида (1) и (2) справедливо неравенство*

$$\sum_{i=1}^{s} \left\| \sum_{|\beta|\leqslant l_i} b_{i\beta} D^{\beta} f_i(x) \right\|_{C(\Omega)} \leqslant k \sum_{j=1}^{N} \| P_j(D) f \|_{C(\Omega)},$$

то выполняются равенства (10), где числа λ_j не зависят от i.

Следствие 2. *Пусть*

$$P_j(D) f = \sum_{i=1}^{s} P_{ji}(D) f_i, \quad Q(D) f = \sum_{i=1}^{s} Q_i(D) f_i, \quad f \in \Pi C^{l_i}(\Omega),$$

где $P_{ji}(D)$ и $Q_i(D)$ — однородные дифференциальные многочлены степени

l_i определяемые равенствами (3). Тогда для справедливости неравенства (9) $\forall f \in \Pi C^{l_i}(\Omega)$ необходимо и достаточно выполнение равенств (10) с числами λ_j, $1 \leqslant j \leqslant N$, не зависящими от i, $1 \leqslant i \leqslant s$.

Замечание 1. Предложение 1 и оба следствия верны и для пространств $\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$, $\Pi \overset{0}{W}{}_\infty^{l_i}(\Omega)$, $\Pi \overset{0}{C}{}^{l_i}(\Omega)$. В последних двух случаях при построении $g(x)$ надо домножить правую часть в (14) на срезывающую функцию $\eta(x) \in \overset{0}{C}{}^\infty(\Omega)$ с носителем в шаре радиуса строго меньшего единицы, и доказательство остается без изменений.

Замечание 2. Предложение 1 и следствие 2 в скалярном случае ($s=1$) для пространства $\overset{0}{C}l\,(R^n)$ были доказаны другим методом в работе [2]. В случае L_1-нормы теорема, аналогичная следствию 2 (для $s=1$), была доказана в [3].

Следуя [4], будем называть систему дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ коэрцитивной в $\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$, если для всех $f \in \Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$.

$$\sum_{i=1}^{s} \sum_{|\alpha| \leqslant l_i} \| D^\alpha f_i \|_{L_\infty(D)} \leqslant k \left[\sum_{j=1}^{N} \| P_j(x, D) f \|_{L_\infty(\Omega)} + \| f \|_{L_\infty(\Omega)} \right]$$

с константой k, не зависящей от $f \in \Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$.

Предложение 2. *Пусть открытое множество Ω удовлетворяет слабому условию l-рога (см. [4]), где $l=(l_1, l_2, \ldots, l_s)$ — вектор с натуральными компонентами. Система дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами $\{P_j(D)\}_1^N$ вида (1) коэрцитивна в $\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$ или в $\Pi C^{l_i}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{Rg} A = R$, где A — матрица коэффициентов вида (4) системы операторов $\{P_{ji}(D)\}$, а R определено равенством (5).*

Доказательство. Необходимость следует из предложения 1. Доказательство достаточности проведем, чтобы не загромождать изложения, в скалярном случае $s=1$. Итак, пусть $\operatorname{Rg} A = R$. Тогда для любого α ($|\alpha| = l$) найдется дифференциальный оператор $Q_\alpha(D)$ порядка, строго меньшего l, такой, что $D^\alpha + Q_\alpha(D)$ — линейная комбинация операторов $P_j(D)$ с числовыми коэффициентами. Поэтому $\forall \alpha$, $|\alpha| = l$, справедливо неравенство

$$\| D^\alpha f + Q_\alpha(D) f \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant k \sum_{j=1}^{N} \| P_j(D) f \|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{16}$$

где k не зависит от α и $f \in W_\infty^l(\Omega)$. Суммируя (16), получаем

$$\sum_{|\alpha|=l} \| D^\alpha f \|_{L_\infty(\Omega)} - \sum_{|\alpha|=l} \| Q_\alpha(D) f \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant k_1 \sum_{j=1}^{N} \| P_j(D) f \|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{17}$$

Выбрав достаточно малое ε, воспользуемся результатом Смита [5] (см. также [4]) в форме

$$\| Q_\alpha(D) f \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \varepsilon \sum_{|\alpha|=l} \| D^\alpha f \|_{L_\infty(\Omega)} + C_{(\varepsilon)} \| f \|_{L_\infty(\Omega)}.$$

Отсюда

$$\sum_{|\alpha|=l} \| Q_\alpha(D) f \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant \varepsilon_1 \sum_{|\alpha|=l} \| D^\alpha f \|_{L_\infty(\Omega)} + C(\varepsilon_1) \| f \|_{L_\infty(\Omega)}, \tag{18}$$

где $\varepsilon_1 < 1$. Из (17) и (18) следует, что

$$(1-\varepsilon_1) \sum_{|\alpha|=l} \| D^\alpha f \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant k_1 \sum_{j=1} \| P_j(D) f \|_{L_\infty(\Omega)} + C(\varepsilon_1) \| f \|_{L_\infty(\Omega)}. \tag{19}$$

Неравенство (19) оценивает все производные порядка l. Оценка производных меньшего порядка теперь не представляет труда. Например, можно воспользоваться неравенством Смита. Предложение доказано.

П р е д л о ж е н и е 3. *Система дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами* $\{P_j(D)\}_1^N$ *вида* (1) *коэрцитивна в одном из пространств* ($\Pi \overset{0}{C}{}^{l_i}(\Omega)$ *или* $\Pi \overset{0}{W}{}_\infty^{l_i}(\Omega)$) *тогда и только тогда, когда* $\operatorname{Rg} A = R$.

З а м е ч а н и е. Условия коэрцитивности в пространствах $\Pi W_p^{l_i}(\Omega)$ и $\Pi \overset{0}{W}{}_p^{l_i}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, хорошо известны (см. [4, 6]). Заметим, что эти условия существенно различны в пространствах $\Pi W_p^{l_i}(\Omega)$ и $\Pi \overset{0}{W}{}_p^{l_i}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, в то время как в $\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$ и $\Pi \overset{0}{W}{}_\infty^{l_i}(\Omega)$ они, как это следует из предложений 2 и 3, одинаковы. Этот факт показывает бессодержательность вопроса о коэрцитивности граничных задач в пространствах $\Pi W_\infty^{l_i}(\Omega)$ и $\Pi C^{l_i}(\Omega)$, что прямо противоположно ситуации в $\Pi W_p^{l_i}(\Omega)$, $1 < p < \infty$. При некоторых ограничениях на коэффициенты предложения 1 — 3 можно распространить и на дифференциальные операторы $P_i(x, D)$ и $Q(x, D)$ (см. (1), (2)).

Граница $\partial\Omega$ для области Ω удовлетворяет условию распространения, если любая функция $f(x) \in C^1(\Omega)$ продолжается до функции $g(x) \in C^1(R^n)$.

П р е д л о ж е н и е 4. *Пусть коэффициенты* $c_{ji\beta}(x)$, $b_{i\beta}(x) \in C(\Omega)$ ($L_\infty(\Omega)$), *причем* $c_{ji\beta}(x) \in C^1(\Omega)$ *при* $|\beta| = l_i$, *а граница* $\partial\Omega$ *области* Ω *удовлетворяет некоторому условию распространения (например, кусочно-гладкая класса* C^1*). Если для операторов* $P_j(x, D)$ *и* $Q(x, D)$ *выполняется неравенство*

$$\| Q(x, D) f \|_{L_\infty(\Omega)} \leqslant k \sum_{j=1}^{N} \| P_j(x, D) f \|_{L_\infty(\Omega)} \tag{20}$$

с константой k, *не зависящей от* $f \in C^{l_1 \dots l_n}(\Omega)$ ($f \in W^{l_1 \dots l_n}(\Omega)$), *то существуют функции* $\lambda_j(x) \in C(\Omega)$ ($L_\infty(\Omega)$) *такие, что одновременно для всех* i *справедливы равенства*

$$Q_i(x, \xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x) P_{ji}(x, \xi). \tag{21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Рассмотрим, как и при доказательстве предложения 1, матрицу $B(x)$ коэффициентов вида (11) системы операторов $\{P_j(x, D), Q(x, D)\}$.

Пусть хотя бы в одной точке $x_0 \in \overline{\Omega}$, $\operatorname{Rg} A(x_0) \neq \operatorname{Rg} B(x_0)$, т. е. $\operatorname{Rg} B(x_0) = \operatorname{Rg} A(x_0) + 1$. Если $x_0 \in \Omega$, т. е. x_0 — внутренняя, то без ограничения общности считаем $x_0 = 0$ и составляем, как и ранее, функцию $g(x)$ вида (14). Теперь, однако, $g_1(x)$ имеет вид

$$g_1(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta| = l_i} [c_{ji\beta}(x) \mu_{i\beta}] \ln \ln [k^2 (x_1^2 + \dots + x_n^2)^{-1}] + \varphi(x),$$

где $\varphi(x) \in C(\Omega)$. Учитывая, что $c_{ji\beta}(x) \in C^1(\Omega)$ при $|\beta| = l_i$, воспользуемся леммой Адамара

$$c_{ji\beta}(x) = c_{ji\beta}(0, 0, \dots, 0) + \sum_{m=1}^{n} x_m \varphi_{ji\beta}(x_1, \dots, x_n). \tag{22}$$

Из представления (22) с учетом условия (12), где $c_{ji\beta} = c_{ji\beta}(0)$, получим $g_1(x) \in C(\Omega)$. Поэтому правая часть в (20) будет конечной, если вместо $f(x)$ подставить $g(x)$. Доказательство завершается, как и в предложении 1. Пусть точка x_0, в которой $\operatorname{Rg} B(x_0) = \operatorname{Rg} A(x_0) + 1$, граничная, т. е. $x_0 \in \partial\Omega$. Так как граница $\partial\Omega$ области Ω удовлетворяет условию распространения, применим лемму Адамара к продолжениям функций $c_{ji\beta}(x)$ в некоторую окрестность $u(x_0)$ точки x_0 и повторим приведенные выше рассуждения.

П р е д л о ж е н и я 5. *Пусть* $c_{ji\beta}(x)$, $b_{i\beta}(x) \in C(\Omega)$ ($L_\infty(\Omega)$), *причем* $c_{ji\beta}(x) \in C^1(\Omega)$ *при* $|\beta| = l_i$. *Если для операторов* $P_j(x, D)$ *и* $Q(x, D)$ *выпол-*

няется неравенство (20) $\forall f \in \Pi \overset{0}{C}{}^{l_i}(\Omega)$ $(\forall f \in \overset{0}{W}{}^{l_i}_{\infty}(\Omega))$, то существуют функции $\lambda_j(x) \in C(\Omega)$ $(L_\infty(\Omega))$ такие, что одновременно для всех i, $1 \leqslant i \leqslant s$, справедливы соотношения (21).

Замечание 1. Имеют место следствия предложений 4 и 5, аналогичные следствиям 1, 2 предложения 1.

Замечание 2. Отметим, что доказать предложения 4 и 5 методом работы [2], основанном на преобразовании Фурье, по-видимому, нельзя.

Из предложений 4 и 5 легко следуют условия коэрцитивности системы дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ с переменными коэффициентами.

Предложение 6. *Пусть открытое множество Ω удовлетворяет слабому условию l-рога, а его граница $\partial\Omega$ — условию любой теоремы распространения для класса $C^1(\Omega)$. Система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ дифференциальных операторов*

$$P_j(x, D) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{|\beta| \leqslant l_i} c_{ji\beta}(x) D^\beta f_i(x), \quad 1 \leqslant j \leqslant N, \tag{23}$$

где $c_{ji\beta}(x) \in C(\Omega)$ $(L_\infty(\Omega))$, а $c_{ji\beta}(x) \in C^1(\Omega)$, при $|\beta| = l_i$ коэрцитивна в $\Pi C^{l_i}(\Omega)$ $(\Pi W^{l_i}_\infty(\Omega))$ тогда и только тогда, когда ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \{c_{11\beta}(x)\}, & \{c_{12\beta}(x)\}, \ldots, & \{c_{1s\beta}(x)\} \\ \{c_{N1\beta}(x)\}, & \{c_{N2\beta}(x)\}, \ldots, & \{c_{Ns\beta}(x)\} \end{pmatrix} \tag{24}$$

вида (4) (где $|\beta| = l_i$ для $c_{ji\beta}(x)$) равен числу R из равенства (5).

Предложение 7. *Система дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ вида (23), где $c_{ji\beta}(x) \in C(\Omega)$ $(L_\infty(\Omega))$, а $c_{ji\beta}(x) \in C^1(\Omega)$ при $|\beta| = l_i$, коэрцитивна в $\Pi \overset{0}{C}{}^{l_i}(\Omega)$ $(\Pi \overset{0}{W}{}^{l_i}_\infty(\Omega))$ тогда и только тогда, когда $\mathrm{Rg}\, A = R$, где A — матрица коэффициентов вида (24), а R определено равенством (5).*

Доказательства предложений 6 и 7 аналогичны доказательству предложения 2.

1. *Юдович В. И.* О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений.— Докл. АН СССР, 1961, 138, № 4, с. 805—808.
2. *de Leeuw K., Mirkil H.* A priori estimates for differential operators in L_∞ norm.— Illinois J. Math., 1964, 9, № 1, p. 112—124.
3. *Ornstein D.* A non- inequality for differential operators in the L_1 norm.—Arch. Ration Mech. and Anal., 1962, 11, № 1, p. 40—49.
4. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.— М.: Наука, 1975.— 480 с.
5. *Smith K. T.* Inequalities for formally positive integro-differential forms.—Bull. Amer. Math. Soc., 1967, 67, p. 368—370.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.— Киев : Наук. думка, 1965.— 798 с.

Донецкий
политехнический институт

Поступила в редакцию
21.01.1981 г.