УДК 519.21

Т. В. Каратаева, Г. П. Буцан

Об одном классе гауссовских мер на пространстве операторов

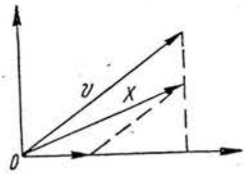
В работах [1, 3] рассматривались гауссовские и обобщенные гауссовские меры на пространствах операторов с математическим ожиданием, равным 0, и корреляционным трансформатором вида $\mathfrak{L} = A \otimes B$ и были изучены условия эквивалентности указанных мер относительно мультипликативного сдвига на линейный оператор u над H (или над некоторым его расширением). В частности, было показано, что заданная мера μ и сдвинутая мера μu^{-1} либо совпадают, либо ортогональны.

В работе [2] была рассмотрена топологическая полугруппа $G_H = \sigma_2(H) + E$ по умножению (E — единичный оператор), мультипликативный сдвиг $F = u + E \in G_H$; $\forall v \in \sigma_2(H): F(v + E) = (u + E)v + u + E$, гауссовская мера μ с корреляционным трансформатором $\mathfrak{L} = A \otimes B$ и математическим ожиданием E. Тогда вопрос об эквивалентности мер μ и μF^{-1} сводился к вопросу об эквивалентности μ и $\mu(u+E)^{-1}$, $\mu(u+E)^{-1}$ и $\mu(u+E)_u^{-1}$ одновременно, где ν_u определяется как аддитивный сдвиг меры ν на оператор u. На основании предыдущих результатов в этой работе было показано, что сдвиги, имеющие вид

$$F(T) = A^{1/2}[i(1 - e^{i\alpha})E + K^*TK]^{-1} K^*TKA^{-1/2} + E, \qquad (1)$$

где $\alpha \neq 0$, $K = B^{1/2}A^{1/2}$, а T — произвольный самосопряженный ограниченный оператор, будут допустимыми для заданной меры μ.

Наконец, в работе [4] рассматривалась группа $\mathcal{G}_H$ всех невырожденных операторов из G_H в индуцированной из G_H топологии и изучалось сечение $\hat{\mu}$ на $\mathcal{G}_H$ указанной выше гауссовской меры μ на G_H. Там было показано, что множество S всевозможных произведений допустимых сдвигов для $\hat{\mu}$ вида (1) будет всюду плотным в $\mathcal{G}_H$. Тем самым, был построен пример меры на нелокально-компактной некоммутативной топологической группе, имеющей всюду плотное множество S допустимых сдвигов.



Этот пример решает известную проблему И. М. Гельфанда о существовании таких мер, поставленную им более 15 лет назад.

Естественно поставить вопрос: насколько широк класс гауссовских мер с корреляционным трансформатором $\mathfrak{L}$ вида $A \otimes B$?

Рассмотрим случай, когда корреляционный трансформатор $\mathfrak{L}$ гауссовской меры μ имеет вид $\Sigma_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i$, где A_i и B_i — симметричные положительные ядерные операторы над H. $\Sigma_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i$ будет обладать теми же свойствами (см. [1]), и такими суммами можно приблизить любой симметричный положительный ядерный трансформатор $\mathfrak{L}$ над $\sigma_2(H)$.

Возможно ли в общем случае представление $\Sigma_{i=1}^{n} A_i \otimes B_i = A \otimes B$, где A и B не выражаются линейно через A_i и B_i соответственно? Изучим вначале этот вопрос для суммы двух слагаемых $A_1 \otimes B_1 + A_2 \otimes B_2 = A \otimes B$. Для этого прежде всего напомним некоторые определения (см. [5]).

Для $x, y \in H$ оператор $x \otimes y : u \to (x, u)\, y$ называется тензорным произведением элементов x и y из H.

Легко видеть, что для трансформатора $A \otimes B$ над $\sigma_2(H)$ и оператора $x \otimes y$ над H справедлива формула

$$(A \otimes B)(x \otimes y) = Ax \otimes By. \tag{2}$$

А тензорное произведение $x \otimes y$ удовлетворяет свойству

$$(x \otimes y)^* = y \otimes x. \tag{3}$$

Условимся, что если задан оператор Q над H и QH входит в обе части некоторого равенства, то это равенство предполагается справедливым при каждом фиксированном $x \in H$, одном и том же для обеих частей этого равенства.

Решение поставленного выше вопроса распадается на ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть A_1 и A_2 — линейные ограниченные операторы над H, имеющие одно и то же ядро* $\mathrm{Ker}\, A_1 = \mathrm{Ker}\, A_2 = N$. *Если* $\forall x \in H$, $x \notin N : \exists \alpha_x \in R^1$ *такое, что* $A_1 x = \alpha_x A_2 x$, *то* $\exists \alpha \in R'$ *такое, что* $A_1 = \alpha A_2$.

Доказательство.

1. $\forall x \in N$, $\forall \alpha \in R^1 : A_1 x = \alpha A_2 x$.

2. Рассмотрим фактор-пространство $H/N = \Phi$, и пусть $x, y \in Q \in \Phi$, $Q \neq N$, тогда $\exists h \in N$ такое, что $x = y + h$ и $\alpha_y A_2 y = A_1 y = A_1 (y + h) = \alpha_{y+h} A_2 (y + h) = \alpha_{y+h} A_2 y = \alpha_x A_2 y$, поэтому $\alpha_y = \alpha_x$, так как $y \notin N$.

Пусть, наконец, x и y принадлежат разным классам P и Q соответственно из Φ, которые не совпадают с N. Тогда $\alpha_{x+y} A_2 y + \alpha_{x+y} A_2 x = \alpha_{x+y} A_2 (x + y) = A_1 (x + y) = A_1 x + A_1 y = \alpha_y A_2 y + \alpha_x A_2 x$, откуда $A_2 ((\alpha_x - \alpha_{x+y})\, x + (\alpha_y - \alpha_{x+y})\, y) = 0$. Стало быть $(\alpha_x - \alpha_{x+y})\, x + (\alpha_y - \alpha_{x+y})\, y \in N$. Поэтому $\alpha_x = \alpha_y = \alpha_{x+y}$.

Замечание 1. Условие совпадения ядер операторов A_1 и A_2 в лемме 1 является существенным, на что указывает следующий пример.

Пусть $H = R^2$, оператор A_1 — проектор вдоль направления вектора v, а A_2 — ортопроектор на ось абсцисс (см. рисунок). Тогда образы $A_1 x$ и $A_2 x$ любого элемента $x \in H$ коллинеарны, но $A_1 \neq \alpha A_2$ при $\alpha \in R^1$.

Лемма 2. *Если A, B, C, $D \not\equiv 0$ — линейные ограниченные операторы над H и $C \otimes D = A \otimes B$, то $\exists \lambda \in R^1$ такое, что $1/\lambda C = A$, $B = \lambda D$.*

Доказательство. По формуле (2) $\forall x \in H \setminus \operatorname{Ker} D$ справедливо равенство $AH \otimes Bx = CH \otimes Dx$. Если $Bx = 0$, то $CH = 0$, что противоречит условию, поэтому $Bx \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{Ker} B \in \operatorname{Ker} D$. Аналогично $\operatorname{Ker} D \subset \operatorname{Ker} B$. Значит, $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} B = N$. С учетом (2) из равенства $(Ax, z)\, By = (Ax \otimes By)\, z = (Cx \otimes Dy)\, z = (Cx, z)\, Dy$ для $x, y, z \in H$ по лемме 1 вытекает, что $B = \lambda D$, где $\lambda \in R^1$. Следовательно, $A = \lambda^{-1} C$.

Лемма 3. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \eta_1, \eta_2, \zeta_1, \zeta_2 \in H$ и $\xi_1 \otimes \xi_2 + \eta_1 \otimes \eta_2 = \zeta_1 \otimes \zeta_2$. Тогда $\xi_1 = \lambda\eta_1 = \gamma\zeta_1$ или $\xi_2 = \alpha\eta_2 = \beta\zeta_2$ для некоторых $\lambda, \gamma, \alpha, \beta \in R^1$.*

Доказательство. $\exists y \in H: (\zeta_1, y) \neq 0$ и для него справедливо равенство $(\xi_1, y)\, \xi_2 + (\eta_1, y)\, \eta_2 = (\zeta_1, y)\, \zeta_2$, откуда $\zeta_2 = \dfrac{(\xi_1, y)}{(\zeta_1, y)} \xi_2 + \dfrac{(\eta_1, y)}{(\zeta_1, y)} \eta_2$. Подставляя это равенство в условие леммы, получаем равенство

$$\xi_1 \otimes \xi_2 + \eta_1 \otimes \eta_2 = \frac{(\xi_1, y)}{(\zeta_1, y)} \zeta_1 \otimes \xi_2 + \frac{(\eta_1, y)}{(\zeta_1, y)} \zeta_1 \otimes \eta_2,$$

из которого в свою очередь вытекает соотношение

$$\left(\xi_1 - \frac{(\xi_1, y)}{(\zeta_1, y)} \zeta_1\right) \otimes \xi_2 + \left(\eta_1 - \frac{(\eta_1, y)}{(\zeta_1, y)}\right) \otimes \eta_2 = 0,$$

которое дает либо $\xi_2 = \alpha\eta_2$, либо $\xi_1 = \dfrac{(\xi_1, y)}{(\zeta_1, y)} \zeta_1$, $\eta_1 = \dfrac{(\eta_1, y)}{(\zeta_1, y)} \zeta_1$. В первом случае легко показать, что и $\xi_2 = \gamma\zeta_2$.

Лемма 4. *Если $A_1, B_1, A_2, B_2, C, D \not\equiv 0$ — линейные ограниченные операторы над H и $C \otimes D = A_1 \otimes B_1 + A_2 \otimes B_2$, то $\exists \alpha, \gamma \in R^1$ такие, что $A_1 = \alpha A_2 = \gamma C$ или $\exists \beta, \delta \in R^1$ такие, что $B_1 = \beta B_2 = \delta D$.*

Доказательство. 1. Пусть A_1, A_2, B_1, B_2, C, D — невырожденные операторы, тогда $\forall x, y \in H$ согласно свойству (2) выполняется равенство

$$A_1 x \otimes B_1 y + A_2 x \otimes B_2 y = Cx \otimes Dy \tag{4}$$

и по лемме 3 либо $A_1 x$, $A_2 x$, Cx, либо $B_1 y$, $B_2 y$, Dy — коллинеарны. Пусть, для определенности, $\exists y \in H$ такое, что $B_1 y$, $B_2 y$, Dy не коллинеарны и по лемме 1 $A_1 = \alpha A_2 = \gamma C$ для некоторых $\alpha, \gamma \in R^1$.

II. $\exists \operatorname{Ker} B_1 \neq 0$ (здесь B_1 взято для определенности). Тогда по свойству (2) справедливо равенство $A_2 H \otimes B_2 \operatorname{Ker} B_1 = CH \otimes \operatorname{Ker} B_1$.

1. $\exists x \in \operatorname{Ker} B_1$ такое, что $Dx \neq 0$ или $B_2 x \neq 0$. Легко видеть, что в этом случае последние два неравенства выполняются одновременно. Доказательство этого факта аналогично лемме 2. Тогда $\operatorname{Ker} A_2 = \operatorname{Ker} C = N$ и $\forall x \in H$, $x \in N$ $\exists \alpha_x \in R^1$ такое, что $A_2 x = \alpha_x Cx$, откуда по лемме 1 вытекает равенство $A_2 = \alpha C$ для некоторого $\alpha \in R^1$, что в свою очередь совместно с леммой 2 дает $A_1 = \gamma C$ при $\gamma \in R^1$.

2. $\operatorname{Ker} B_1 \subset \operatorname{Ker} A_2 \cap \operatorname{Ker} D$. Тогда согласно свойству (2) $A_1 H \otimes B_1 \operatorname{Ker} B_2 = CH \otimes D \operatorname{Ker} B_2$ и если $\exists x \in \operatorname{Ker} B_2$ такое, что $B_1 x \neq 0$ или $Dx \neq 0$, то, проводя те же рассуждения, что в п. I, убеждаемся в справедливости леммы.

Пусть теперь $\operatorname{Ker} B_1 = \operatorname{Ker} B_2 \subset \operatorname{Ker} D$, тогда, опираясь на свойство (2), имеем $A_1 H \otimes B \operatorname{Ker} D = -A_2 H \otimes B \operatorname{Ker} D$.

Рассмотрим следующие возможности.

а) $\exists x \in \operatorname{Ker} D$ такое, что $B_1 x \neq 0$ или $B_2 x \neq 0$. Тогда, проводя те же рассуждения что и в п. I, получаем доказательство леммы.

б) $\operatorname{Ker} D = \operatorname{Ker} B_1 = \operatorname{Ker} B_2 = N$. Заметим, что в силу свойства (3) равенство (4), справедливое для любых $x, y \in H$, эквивалентно равенству $Dy \otimes Cx = B_2 y \otimes A_2 x + B_1 y \otimes A_1 x$, что в свою очередь влечет эквивалентность условия леммы 4 равенству $D \otimes C = B_1 \otimes A_1 + B_2 \otimes A_2$.

Применяя рассуждения, приведенные выше, убеждаемся, что случай б) сводится к случаю, когда дополнительно к б) выполняется условие $\operatorname{Ker} C = \operatorname{Ker} A_1 = \operatorname{Ker} A_2 = M$. Пусть в этом случае операторы A_1, A_2, C не коллинеарны. Тогда по лемме 1, $\exists x \in H$, $x \in M$, $\forall \alpha \in R^1$, $A_1 x \neq \alpha A_2 x$ (здесь A_1 и A_2 взяты для определенности). Тогда для любого $y \in H$ из соотношения (4) по лемме 3 для некоторых B_y, $\delta_y \in R^1$ вытекает равенство $B_1 y = \beta_y B_2 y = \delta_y C_y$, что в свою очередь в силу леммы 1 влечет соотношение $B_1 = \beta B_2 = \delta C$, справедливое для некоторых β, $\delta \in R^1$.

Итак, класс гауссовских мер на G_H с корреляционным трансформатором $\mathfrak{L} = A \otimes B$ довольно узок. Его изучение было целесообразным, так как позволило решить проблему И. М. Гельфанда. Сам по себе, этот факт в какой-то мере объясняет первоначальное предположение о том, что класс изучаемых мер не широк. По крайней мере с его помощью нельзя аппроксимировать гауссовские меры на G_H с произвольным корреляционным трансформатором $\mathfrak{L}$. Однако при исследовании мультипликативных сдвигов гауссовских мер на $\sigma_2(H)$, G_H, $\mathcal{G}_H$, по-видимому, следует изучить такие меры, у которых корреляционный трансформатор $\mathfrak{L}$ имеет вид $\Sigma_{k=1}^{n} A_k \otimes B_k$, поскольку таковыми можно в известном смысле приближать произвольные меры.

1. *Буцан Г. П.* Одно условие эквивалентности гауссовских мер в гильбертовом пространстве.— Укр. мат. журн., 1973, 25, № 4, с. 510—514.
2. *Буцан Г. П.* Одно условие эквивалентности меры, заданной в полугруппе относительно сдвига.— Укр. мат. журн., 1974, 26, № 1, с. 70—74.
3. *Буцан Г. П.* Об ортогональности обобщенной меры, заданной на кольце операторов, относительно сдвига.— Укр. мат. журн., 1975, 27, № 3, с. 330—364.
4. *Буцан Г. П.* Один пример квазиинвариантной меры на нелокально компактной, не коммутативной топологической группе.— В кн.: Вопросы статистики и управления случайными процессами. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1973, с. 32—36.
5. *Виленкин И. Я.* Специальные функции и теория представлений групп.— М. : Наука, 1965.— 588 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
24.04.81 г.