УДК 517.946.9:551.465.10

Ю. А. Митропольский, А. А. Березовский, А. С. Богуславский

Качественное исследование математической модели термоклина

Одной из важных задач теории формирования физических полей гидросферы Земли, определяющих глобальные особенности климата и погоды, является изучение вертикального распределения температуры в тропической зоне океанов, где аккумулируется максимальное количество солнечного тепла. Наиболее характерной чертой стационарного температурного поля в тропических широтах океанов является наличие термоклина — слоя воды с относительно высоким температурным градиентом, вне пределов которого температура с глубиной меняется незначительно. Механизм формирования термоклина носит турбулентный характер, и поэтому его теоретическое исследование сопряжено с трудностями, возникающими уже на стадии создания математических моделей, т. е. выбора конкретных функциональных зависимостей турбулентного коэффициента теплопроводности от координаты и градиента температуры — $\lambda = \lambda(x, u')$. Если такая зависимость выбрана, то определение стационарного температурного поля в полуограниченной водной среде сводится к решению нелинейной краевой задачи

$$\lambda(x, u')\, u']' + pu' - \nu'(x) = 0, \quad \forall x \in [0, \infty), \quad u(0) = 1, \quad u(x) = 0, \quad x \to \infty, \tag{1}$$

где p и $\nu(x) \geqslant 0$ — положительная постоянная и ограниченная монотонно убывающая функции ($\nu'(x) < 0$), моделирующие скорость подъема глубинных вод и плотность объемного поглощения солнечной радиации.

Из общих физических законов и экспериментально установленных зависимостей [1] можно предположить, что $\forall x \in [0, \infty)$ и $\forall u' \in (-C, A)$, где A и C — некоторые положительные постоянные,

$$[\lambda(x, u') > 0, \quad \lambda_x(x, u') \leqslant 0, \quad [\lambda(x, \eta) \cdot \eta]_\eta > 0, \quad \lambda(x, u') = 1 \quad \forall x > X \gg 1. \tag{2}$$

При выполнении (2) краевая задача (1) имеет единственное решение. Действительно, пусть $u_1(x)$ и $u_2(x)$ — ее различные решения. Тогда для них выполняется соотношение

$$\int_0^\infty [\lambda(x, u_2')\, u_2' - \lambda(x, u_1')\, u_1']\,(u_2' - u_1')\, dx = 0, \tag{3}$$

вытекающее из (1). В силу монотонности $\lambda(x, u')\, u'$ как функции u' последнее возможно только при

$$[\lambda(x, u_2')\, u_2' - \lambda(x, u_1')\, u_1']\,(u_2' - u_1') = 0 \quad \forall x \in [0, \infty), \quad \forall u' \in (-C, A), \tag{4}$$

что в свою очередь приводит к цепи следствий $u_2'(x) - u_1'(x) = 0 \Rightarrow u_2(x) - u_1(x) = \mathrm{const} \Rightarrow u_2(x) \equiv u_1(x)$, доказывающих единственность решения нелинейной краевой задачи (1).

Необходимым условием существования термоклина является наличие точки перегиба функции $u(x)$ при отрицательной производной — $u'(x) < 0$, достигающей в этой точке максимального по модулю значения. Очевидно, что в точке перегиба $x = x_T$ вторая производная $u''(x)$ обращается в нуль, а значение третьей производной $u'''(x)$ должно быть положительным. Явно выраженному термоклину соответствуют большие отрицательные значения градиента температуры в окрестности точки перегиба. Ниже будет показано, что при не очень ограничительных условиях на безразмерный коэффициент турбулентной теплопроводности $\lambda(x, u')$, функцию $\nu(x)$ и параметр стоков тепла p решение краевой задачи (1) обладает такой точкой перегиба, а следовательно, позволяет описать явление термоклина.

В силу условия $-\lambda(x, u') = 1 \ \forall x > X$ задача (1) сводится к отысканию исчезающего на бесконечности решения $u(x)$ задачи Коши для нелинейного дифференциального уравнения первого порядка

$$\lambda(x, u')\, u' + pu - \nu(x) = 0, \quad x \in [0, \infty), \quad u(0) = 1. \tag{5}$$

Из уравнения (5) следует, что функция $u(x)$ будет возрастающей или убывающей в окрестности точки $x = 0$ в зависимости от знака находящейся в нашем распоряжении разности $\nu(0) - p$. В связи с этим рассмотрим следующие случаи.

1. Пусть $u'(0) \geqslant 0$ ($\nu(0) \geqslant p$). Тогда, если в дополнение к оговоренным выше условиям функции $\lambda(x, u')$ и $\nu(x)$ удовлетворяют условиям

$$\nu''(x) > 0, \quad \lambda_{xx}(x, \eta) \geqslant 0 \tag{6}$$

$\forall x > 0$ и $\forall \eta \in (-C, A)$, то решение $u(x)$ нелинейной краевой задачи (1) имеет единственную точку перегиба в области убывания, т. е. при $u'(x) < 0$.

Действительно, $u(x)$, очевидно, имеет стационарные точки $x = x_i$, в которых $u'(x_i) = 0$. В этих точках согласно (5)

$$u_i = u(x_i) = \nu(x_i)/p > 0. \tag{7}$$

Следовательно, $u(x) > 0 \ \forall x \in [0, \infty)$. Дифференцируя (5) и полагая $x = x_i$, $u'(x_i) = 0$, находим

$$u_i'' = u''(x_i) = \nu'(x_i)/\lambda(x_i, 0) < 0, \tag{8}$$

что приводит к выводу о существовании единственной стационарной точки $x_i = x_m$, $x_m \in [0, \infty]$, в которой $u(x)$ достигает максимума ($x_m = 0$ при $\nu(0) = p$). На полуограниченном интервале (x_m, ∞) функция $u(x)$ монотонно убывает ($u'(x) < 0$) и меняет знак второй производной. Пусть x_k есть точки перегиба — $u''(x_k) = 0$, $u'''(x_k) \neq 0$. Тогда, дважды дифференцируя (5) и полагая $x = x_k$, в силу условия (6) и условия $[\lambda(x, \eta) \cdot \eta]_\eta > 0$ получаем

$$u'''(x_k) = \frac{\nu''(x_k) - \lambda_{xx}(x_k, u'(x_k))\, u'(x_k)}{[\lambda(x_k, u'(x_k)) \cdot u'(x_k)]_{u'}} > 0. \tag{9}$$

Следовательно, во всех точках $x = x_k$ функция $u'(x)$ достигает минимума. Последнее возможно лишь в случае единственной точки перегиба $x = x_T$, что и требовалось установить.

2. Пусть $u'(0) < 0$ ($\nu(0) < p$). Тогда существует единственная точка перегиба $u(x) - x = x_T$, если кроме перечисленных условий функции $\lambda(x, u')$, $\nu(x)$ и параметр p удовлетворяют ещё условию

$$\nu'(0) - y\,[p + \lambda_x(0, y)] < 0, \tag{10}$$

где y — корень уравнения

$$\lambda(0, y)\, y = \nu(0) - p. \tag{11}$$

В рассматриваемом случае $u(x)$ — монотонно убывающая функция на всей полуоси $x \geqslant 0$. В самом деле, согласно (7) и (8) единственной возможной стационарной точкой функции $u(x)$ является точка максимума $x = x_m > 0$, что противоречит условию $u'(0) < 0$. Дифференцируя (5), в силу условия (2) — $[\lambda(x, \eta)\eta]_\eta > 0$ и условия (10), находим выражение для второй производной $u''(x)$ при $x = 0$

$$u''(0) = \frac{\nu'(0) - u'(0)\,[p + \lambda_x(0, u'(0))]}{[\lambda(0, u'(0))\, u'(0)]_{u'}} < 0, \tag{12}$$

откуда следует, что функция $u'(x) < 0$ имеет на $(0, \infty)$ стационарные точки $x = x_k$, так как $u'(0) < 0$, $u'(\infty) = 0$. Согласно (9), $u'''(x\ ) > 0$, поэтому существует единственная точка $x = x_T$, в которой $u'(x)$ достигает минимума. Эта точка, очевидно, является точкой перегиба $u(x)$.

Итак, математическая модель (1) позволяет описать явление термоклина, если турбулентный коэффициент теплопроводности $\lambda(x, u')$, функция источников $\nu(x)$ и параметр стоков p удовлетворяют условиям (2) и (6) при $\nu(0) \geqslant p$ и условиям (2), (6), (10), когда $\nu(0) < p$. В первом случае эта модель описывает также экспериментально наблюдаемое явление температурной инверсии, т. е. незначительное повышение температуры с глубиной в поверхностном слое океана.

Отметим, что распределение температуры $T(z)\ \forall\, z \in [0, \infty)$ определяется по относительной избыточной температуре $u(x)$ согласно формуле $T(z) = (T_0 - T_\infty)\, u(\alpha z) + T_\infty$, где T_0 и T_∞ — значения температуры на поверхности океана $z = 0$ и на его дне $z \to \infty$. В тех случаях, когда одна из величин T_0 или T_∞ неизвестна, заданы другие краевые условия, T_0 определяется как положительный корень уравнения вида $Q(T_0) = R + T_\infty$, вытекающего из закона сохранения и краевого условия на поверхности $z = 0$, а T_∞ — по формуле $T_\infty = Q(T_0) - R$.

В работах [2, 3] рассматривались функциональные зависимости турбулентного коэффициента теплопроводности от координаты и градиента температуры вида $\lambda(x, u') = f(x)\, g(u'), f(x) \doteq 1 + ke^{-\gamma x}$, $g(y) = [1 - By]^{-\alpha}$, где $k \geqslant 0$, $\gamma > 0$, $\alpha > 0$, $A \cdot B < 1$, B — параметр Колесникова. Нетрудно видеть, что такие модели турбулентной теплопроводности удовлетворяют условиям (2), (6) и (10), если $\nu''(x) > 0\ \forall x \geqslant 0$, а параметры p, γ, α, B, k и величина $\nu'(0)$ — условию $\nu'(0) - y[p + \gamma k g(y)] < 0$, где $y < 0$ — корень уравнения (11).

1. *Колесников А. Г., Иванова З. С., Богуславский С. Г.* О влиянии устойчивости на интенсивность вертикального переноса в Атлантическом океане.— Океанология, 1961, 1, вып. 4, с. 592—599.
2. *Богуславский С. Г.* Температурное поле Тропической Атлантики. — Киев : Наук. думка, 1977.— 162 с.
3. *Березовский А. А., Богуславский А. С.* Об одной математической модели термоклина.— В кн.: Нелинейные краевые задачи теплопроводности. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1982, с. 9—18.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
24.02.1982 г.