УДК 517.9:534

Нгуен Донг Ань

Случайные колебания механической системы с одной степенью свободы под воздействием периодической силы и «белого шума»

Рассмотрим механическую систему с одной степенью свободы, уравнение движения которой имеет вид

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon [h(x, \dot{x}) + P\cos\omega t] + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t), \tag{1}$$

где $\dot{\xi}(t)$ — случайное воздействие («белый шум» с единичной интенсивностью). Путем замены [1]

$$x = a\cos\psi, \quad \dot{x} = -a\omega\sin\psi, \quad \psi = \omega t + \theta \tag{2}$$

с использованием формулы Ито получим стандартный вид уравнения (1)

$$da = \left[-\frac{\varepsilon}{\omega}(h(x, \dot{x}) + P\cos\omega t)\sin\psi - \frac{\varepsilon\sigma^2}{2\omega^2 a}\cos^2\psi\right]dt - \\ - \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\omega}\sigma\sin\psi d\xi(t), \tag{3}$$

$$d\theta = \left[-\frac{\varepsilon}{a\omega}(h(x, \dot{x}) + P\cos\omega t)\cos\psi - \frac{\varepsilon\sigma^2}{\omega^2 a^2}\sin\psi\cos\psi \right] dt - \frac{\sqrt{\varepsilon}\sigma}{a\omega}\cos\psi\, d\xi(t).$$

Усредняя систему (3) по методике, изложенной в [1], составим соответствующее уравнение Фоккера—Планка—Колмогорова для стационарной плотности вероятностей $W(a, \theta)$

$$\frac{\partial}{\partial a}(K_1 W) + \frac{\partial}{\partial \theta}(K_2 W) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial a^2}(K_{11}W) + \frac{\partial^2}{\partial a \partial \theta}(K_{12}W) + \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}(K_{22}W) \right], \quad (4)$$

откуда с учетом (2) имеем

$$K_1(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}} \left\{ -\frac{1}{\omega}(h(x, \dot{x}) + P\cos\omega t)\sin\psi + \frac{\sigma^2}{2a\omega}\cos^2\psi \right\} =$$

$$= \frac{\sigma^2}{4a\omega^2} - \frac{H(a)}{\omega} - \frac{1}{2\omega}P\sin\theta,$$

$$K_2(a, \theta) = \underset{t}{\mathbf{M}} \left\{ -\frac{1}{a\omega}(h(x, \dot{x}) + P\cos\omega t)\cos\psi - \right.$$

$$\left. - \frac{\sigma^2}{\omega^2 a^2}\sin\psi\cos\psi \right\} = -\frac{1}{a\omega}N(a) - \frac{1}{2a\omega}P\cos\theta,$$

$$K_{11} = \underset{t}{\mathbf{M}} \left\{ \frac{\sigma^2}{\omega^2}\sin^2\psi \right\} = \frac{\sigma^2}{2\omega^2}, \qquad K_{12} = \underset{t}{\mathbf{M}} \left\{ \left(-\frac{\sigma}{\omega}\sin\psi \right)\left(-\frac{\sigma}{a\omega}\cos\psi \right) \right\} = 0,$$

$$K_{22} = \underset{t}{\mathbf{M}} \left\{ \left(-\frac{\sigma}{a\omega}\cos\psi \right)^2 \right\} = \frac{\sigma^2}{2a\omega^2}, \quad (5)$$

$$H(a) = \underset{t}{\mathbf{M}} \{ h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi \},$$

$$N(a) = \underset{t}{\mathbf{M}} \{ h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi \}.$$

Представим уравнение Фоккера — Планка — Колмогорова (4) в виде

$$\frac{\partial}{\partial a}\left\{ K_1 W - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(K_{11}W) \right\} = -\frac{\partial}{\partial \theta}\left\{ K_2 W - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}(K_{22}W) \right\}. \quad (6)$$

Оно будет удовлетворяться, если

$$K_1 W - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial a}(K_{11}W) = 0, \qquad K_2 W - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \theta}(K_{22}W) = 0. \quad (7)$$

Учитывая (5), перепишем систему (7) так:

$$\frac{\sigma^2}{4\omega^2 a^2} - \frac{1}{\omega}H(a) - \frac{1}{2\omega}P\sin\theta - \frac{\sigma^2}{4\omega^2}\frac{\partial \Phi}{\partial a} = 0,$$

$$-\frac{1}{a\omega}N(a) - \frac{1}{2a\omega}P\cos\theta - \frac{\sigma^2}{4\omega^2 a^2}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = 0, \quad (8)$$

$$W(a, \theta) = \exp\{\Phi(a, \theta)\}. \quad (9)$$

Отсюда

$$\frac{\partial \Phi}{\partial a} = \frac{1}{a} - \frac{4\omega}{\sigma^2}H(a) - \frac{2\omega P}{\sigma^2}\sin\theta,$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} = -\frac{4\omega a^2}{\sigma^2}N(a) - \frac{2\omega a}{\sigma^2}P\cos\theta. \quad (10)$$

Для существования функции $\Phi(a, \theta)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось равенство

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{1}{a} - \frac{4\omega}{\sigma^2} H(a) - \frac{2\omega P}{\sigma^2}\sin\theta\right\} = \frac{\partial}{\partial a}\left\{-\frac{4\omega a}{\sigma^2} N(a) - \frac{2\omega a}{\sigma^2} P\cos\theta\right\} \quad (11)$$

или $\frac{\partial}{\partial a}(aN(a)) = 0$. Отсюда

$$N(a) = \alpha a^{-1}, \qquad \alpha = \mathrm{const}. \quad (12)$$

В частности, при $\alpha = 0$, учитывая обозначение (5), получаем условие налагаемое на функцию $h(x, \dot{x})$,

$$\underset{t}{\mathbf{M}}\{h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\} = 0. \quad (13)$$

При выполнении условия (13) из (10) находим

$$\Phi(a, \theta) = \ln Ca - \frac{4\omega}{\sigma^2}\int_0^a H(a)\,da - \frac{2\omega P}{\sigma^2}\sin\theta\cdot a = \ln Ca -$$

$$- \ln Ca - \frac{4\omega}{\sigma^2}\int_0^a \underset{t}{\mathbf{M}}\{h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi\}\,da - \frac{2\omega P}{\sigma^2}\sin\theta\cdot a. \quad (14)$$

Наконец, учитывая (9) и выполнение условия (13), получим решение уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова в виде

$$W(a, \theta) = Ca\exp\left\{-\frac{4\omega}{\sigma^2}\int_0^a \underset{t}{\mathbf{M}}\{h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\sin\psi\}\,da - \right.$$

$$\left. - \frac{2\omega P}{\sigma^2}\sin\theta\cdot a\right\}, \quad C = \mathrm{const}, \quad C > 0. \quad (15)$$

Вернемся к условию (13). Легко видеть, что оно будет выполняться, если функция $h(x, \dot{x})$ имеет вид

$$h(x, \dot{x}) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)\,\dot{x}^{2i+1} + \sum_{j=0}^{m} \varphi_j(\dot{x})\,\dot{x}^{2j}, \quad (16)$$

где $f_i(x)$, $\varphi_j(\dot{x})$ — произвольные многочлены соответственно координаты и скорости (n, m — любые натуральные числа или нуль). Действительно, подставляя (16) в (13), имеем

$$\underset{t}{\mathbf{M}}\{h(a\cos\psi, -a\omega\sin\psi)\cos\psi\} = \sum_{i=0}^{n}(-a\omega)^{2i+1}\underset{t}{\mathbf{M}}\{f_i(\cos\psi)\times$$

$$\times\cos\psi\sin^{2i+1}\psi\} + \sum_{j=0}^{m} a^{2j}\underset{t}{\mathbf{M}}\{\varphi_j(-a\omega\sin\psi)\cos^{2j+1}\psi\} = 0. \quad (17)$$

Для выражения функции $h(x, \dot{x})$ из (16) решение (15) соответствующего уравнения Фоккера — Планка — Колмогорова (4) принимает вид

$$W(a, \theta) = Ca\exp\left\{-\frac{4\omega}{\sigma^2}\left[\sum_{i=0}^{n}\int_0^a(-a\omega)^{2i+1}\underset{t}{\mathbf{M}}\{f_i(a\cos\psi)\cdot\sin^{2i+2}\psi\}\,da + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \sum_{j=0}^{m}\int_0^a a^{2j}\underset{t}{\mathbf{M}}\{\varphi_j(-a\omega\sin\psi)\sin\psi\cdot\cos^{2j}\psi\}\,da\right] - \frac{2\omega P}{\sigma^2}\sin\theta\cdot a\right\}. \quad (18)$$

Итак, нами получена следующая теорема.

Теорема. *Пусть движение механической системы с одной степенью свободы описывается уравнением.*

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon \sum_{i=0}^{n} f_i(x) x^{2i+1} + \varepsilon \sum_{j=0}^{m} \varphi_j(\dot{x}) x^{2j} + \varepsilon P \cos \omega t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \tag{19}$$

Решение этого уравнения можно представить в виде (2), *где функция плотности вероятностей* $W(a, \theta)$ *выражается по формуле (18).*

Функция $W(a, \theta)$ достигает экстремума в точках (a_0, θ_0), где

$$\partial W/\partial a = 0, \qquad \partial W/\partial \theta = 0. \tag{20}$$

Из (18) получаем приближенные уравнения для среднего значения амплитуды и фазы

$$\frac{\sigma^2}{a_0} - 4\omega\left[\sum_{i=0}^{n} (-a_0\omega)^{2i+1} \underset{t}{\mathbf{M}} \{f_i(a_0 \cos\psi) \sin^{2i+2}\psi\} + \sum_{j=0}^{m} a_0^{2j} \underset{t}{\mathbf{M}} \{\varphi_j(-a_0\omega \sin\psi) \sin\psi \cos^{2j}\psi\}\right] - 2\omega P \sin\theta_0 = 0,$$

$$-2\omega P \cos\theta_0 \cdot a_0 = 0. \tag{21}$$

При отсутствии случайного воздействия ($\sigma = 0$) уравнения (21) точно совпадают с таковыми, полученными в [2] для детерминированного случая.

В качестве примера рассмотрим уравнение Ван дер Поля

$$\ddot{x} + \omega^2 x = \varepsilon(1 - \gamma x^2)\dot{x} + \varepsilon P \cos\omega t + \sqrt{\varepsilon}\sigma\dot{\xi}(t). \tag{22}$$

Здесь $n = 0$, $m = 0$, $f_0(x) = 1 - \gamma x^2$, $\varphi_0 = 0$.

Выражение (18) в данном случае имеет вид

$$W(a, \theta) = Ca \exp\left\{-\frac{2\omega P}{\sigma^2}\theta \cdot a + \frac{\omega^2}{\sigma^2}a^2 - \frac{\gamma\omega^2}{8\sigma^2}a^4\right\}, \tag{23}$$

а уравнения (21)

$$\frac{\sigma^2}{a_0} - 2\omega^2 a_0 - \frac{\gamma\omega^2}{2}a_0^3 - 2\omega P \sin\theta_0 = 0, \quad -2\omega P a_0 \cos\theta_0 = 0. \tag{24}$$

Заметим, что при отсутствии периодического воздействия ($P = 0$) уравнения (24) точно совпадают с уравнением, полученным в [1] для автономного случая.

1. *Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г.* Применение асимптотических методов в стохастических системах.— В кн.: Приближенные методы исследования нелинейных систем. Киев : Ин-т математики АН УССР, с. 102—147.
2. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в нелинейной механике.— М.: Наука, 1974.— 501 с.

Вьетнам

Поступила в редакцию 14.07.1981 г.