УДК 517.968

Ю. А. Рябов, Д. Х. Хусанов

Периодические решения интегро-дифференциального уравнения второго порядка в нерезонансном случае

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\ddot{x} + \omega^2 x = f(t) + \mu \left[\omega^2 \int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)\, x(s)\, ds + F(t, x) \right], \qquad (1)$$

где ω — постоянная, отличная о целого числа (нерезонансный случай); μ — малый параметр; функция $f(t)$ — 2π-периодическая по t, представимая полиномом или абсолютно сходящимся рядом Фурье; функция F (t,

x) имеет по t тот же характер, а по x дифференцируема в некоторой области, $|x| < D$. Функцию $R(t)$, называемую ядром релаксации, принимаем равной

$$R(t) = Ae^{-\beta t} t^{-1+\alpha}, \tag{2}$$

где A, α, β — постоянные, причем $0 < \alpha < 1$, $\beta > 0$, $A > 0$. Такое уравнение встречается в теории вязкоупругости при анализе колебаний [2, 3, 8].

Данная статья посвящена построению и оценкам 2π-периодических решений уравнения (1). Отличие от работ [5—7] заключается в анализе сходимости процесса итераций с помощью метода мажорирующих конечных уравнений Ляпунова [1, 4].

Будем искать 2π-периодическое решение уравнения (1) с помощью итераций, принимая за нулевое приближение $x_0(t)$ 2π-периодическое решение уравнения

$$\ddot{x}_0 + \omega^2 x_0 = f(t) + \mu\omega^2 \int\limits_{-\infty}^{t} R(t-s)\, x_0(s)\, ds. \tag{3}$$

Представим функцию $f(t)$ полиномом или рядом Фурье в комплексной форме

$$f(t) = \sum_{k=0,\pm 1,\pm 2,\dots} N_k e^{ikt}. \tag{4}$$

Ищем $x_0(t, \mu)$ в аналогичном виде

$$x_0(t, \mu) = \sum_{k=0,\pm 1,\pm 2,\dots} M_k e^{ikt}, \tag{5}$$

где M_k — искомые коэффициенты.

Подставляя (5) в (3), получаем

$$M_k = N_k [-k^2 + \omega^2 (1 - \mu q_k)]^{-1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{6}$$

где

$$q_k = \int\limits_0^{\infty} R(\theta)\, e^{-ik\theta} d\theta. \tag{7}$$

Так как ω отлично от целого числа и $|q_k|$ при всех k ограничено, то величина $|-k^2 + \omega^2(1 - \mu q_k)|$ по крайней мере при достаточно малых μ и всех $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ограничена снизу положительной постоянной.

Покажем, что ряд (5) с коэффициентами (6) сходится абсолютно и равномерно. Действительно, из (5), (6) следует, что

$$|M_k| \leqslant \rho |N_k|, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{8}$$

$$\sum_k |M_k| \leqslant \rho \sum |N_k|, \tag{9}$$

где

$$\rho = 1/\min_k |-k^2 + \omega^2 (1 - \mu q_k)|. \tag{10}$$

Тригонометрическая норма 2π-периодической функции, представляемой полиномом или абсолютно сходящимся рядом Фурье, равна [1, 4]

$$\|\varphi(t)\|_* = \sum_{k=0,\pm 1,\pm 2,\dots} |A_k|, \tag{11}$$

где A_k — коэффициенты Фурье (полинома или ряда Фурье в комплексной форме). Таким образом, (9) перепишем в виде

$$\|x(t, \mu)\|_* \leqslant \rho \|f(t)\|_*. \tag{12}$$

Согласно принятым условиям функция $f(t)$ представима полиномом или абсолютно сходящимся рядом Фурье. Для этого достаточно, чтобы функция $f(t)$ была дифференцируемой [9]. Тогда норма $\|f(t)\|_*$ конечна. Неравенство (12) показывает, что ряд (5) сходится абсолютно и равномерно по t и представляет искомое 2π-периодическое решение уравнения (3). Кроме того, неравенство (12) дает оценку решения $x_0(t, \mu)$ по тригонометрической норме.

Положим далее в (1) $x = x_0 + y$ и составим уравнение для y

$$\ddot{y} + \omega^2 y = \mu\omega^2 \int_{-\infty}^{t} R(t-s)\, y(s)\, ds + \mu F(t, x_0 + y). \tag{13}$$

Последовательные приближения $y_1, y_2, \ldots$ определим из уравнений

$$\ddot{y}_j + \omega^2 y_j = \mu\omega^2 \int_{-\infty}^{t} R(t-s)\, y_j(s)\, ds + \mu F(t, x_0 + y_{j-1}), \quad j = 1, 2, \ldots, \quad y_0 \equiv 0. \tag{14}$$

Уравнение (14) при $j = 1$ имеет такую же структуру, как и уравнение (3) Действительно, роль функции $f(t)$ играет функция $\mu F(t, x_0)$, где $x_0 = x_0(t)$ — найденная уже 2π-периодическая функция.

Функция $F(t, x)$ согласно принятому нами условию, дифференцируема по t и x при $|x| < D$. Следовательно, если $\| x_0(t) \|_* < D$, то функция $F(t, x(t))$ представима полиномом или абсолютно сходящимся рядом Фурье

$$F(t, x_0(t)) = \sum_{k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} N_k^{(1)} e^{ikt}. \tag{15}$$

Как и в случае уравнения (3), мы получим $y_1(t, \mu)$ в виде полинома или ряда

$$y_1(t, \mu) = \mu \sum_{k=0, \pm 1, \pm 2, \ldots} M_k^{(1)} e^{ikt}, \tag{16}$$

где

$$M_k^{(1)} = N_k/[-k^2 + \omega^2(1 - \mu q_k)], \qquad q_k = \int_0^{\infty} R(\theta)\, e^{-ik\theta} d\theta. \tag{17}$$

При этом справедлива оценка

$$\| y_1(t, \mu) \|_* \leqslant \mu\rho \| F(t, x_0(t)) \|_*, \tag{18}$$

где ρ определяется согласно (10).

Аналогичным путем найдем все дальнейшие приближения $y_2(t, \mu)$, $y_3(t, \mu), \ldots$. Надо лишь потребовать, чтобы при всех $j = 1, 2, \ldots$ выполнялось неравенство

$$\| x_0(t) + y_j(t, \mu) \|_* < D, \tag{19}$$

т. е. чтобы $x_0(t) + y(t, \mu)$ оставалось в области, где функция $F(t, x_0(t) + y_j(t, \mu))$ дифференцируема по t.

Анализ сходимости приближений $y_j(t, \mu)$, $j = 1, 2, \ldots$, проведем с помощью метода мажорирующих уравнений Ляпунова [1, 4], согласно которому из оценок вида (18) для всех $y_j(t, \mu)$ вытекакает, что уравнение

$$u = \mu\rho\Phi(u), \tag{20}$$

где $\Phi(u)$ — мажоранта Ляпунова по отношению к $F(t, x_0 + y)$, является мажорирующим уравнением Ляпунова для уравнения (13). Существует такое $\mu_* > 0$, что в области $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_*$ имеется положительное решение $u = u(\mu)$ такое, что $u(\mu) \to 0$ при $\mu \to 0$. При $\mu > \mu_*$ такого положительного решения не существует. Пусть μ_0 — такое число, что

$$\mu_0 \leqslant \mu_*, \quad 0 < u(\mu_0) < r, \quad \| x_0(t) \|_* + r < D. \tag{21}$$

Тогда согласно [7, 8] последовательные приближения

$$u_1 = \mu\rho\Phi(0), \quad u_2 = \mu\rho\Phi(u_1), \ldots, \tag{22}$$

во-первых, сходятся при $0 \leqslant \mu \leqslant \mu_0$ к $u = u(\mu)$, во-вторых, мажорируют при таких μ приближения $y_j(t, \mu)$, $i = 1, 2, \ldots$, т. е.

$$\| y_j(t, \mu) \|_* \leqslant u_j, \quad \| y_{j+1}(t, \mu) - y_j(t, \mu) \|_* \leqslant u_{j+1} - u_j. \tag{23}$$

Отсюда следует, что при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ последовательность $\{y_j(t, \mu)\}$ сходится (абсолютно и равномерно) к 2π-периодическому решению $y(t, \mu)$ уравнения (13), причем

$$\| y(t, \mu) \|_* \leqslant u(\mu), \tag{24}$$

а функция $x = x_0(t) + y(t, \mu)$ — искомое 2π-периодическое решение уравнения (1).

Теорема. *Пусть дано уравнение (1), где функция $f(t)$ — 2π-периодическая и дифференцируема по t, функция $F(t, x)$ имеет по t тот же характер в области $|x| < D$, а по x в этой области является дифференцируемой. Пусть*

$$\rho = \max_{k=0, \pm 1, \ldots} \frac{1}{|-k^2 + \omega^2(1 - \mu q_k)|}, \quad q_k = \int_0^\infty R(\theta) e^{ik\theta} d\theta,$$

где $R(\theta)$ — ядро релаксации под знаком интеграла в уравнении (1), выражаемое согласно (2). Пусть 2π-периодическое решение $x_0 = x_0(t)$ уравнения (13) и решение $u = u(\mu)$ мажорирующего уравнения (20) при $0 < \mu < \mu_0$ таковы, что $\| x_0(t) \|_* + u(\mu) < D$. Тогда при $0 < \mu \leqslant \mu_0$ существует 2π-периодическое решение $x(t, \mu)$ уравнения (1), и это решение может быть найдено с помощью последовательных приближений, соответствующих уравнениям (3), (14), (15).

1. *Гребеников Е. А., Рябов Ю. А.* Конструктивные методы анализа нелинейных систем.— М. : Наука, 1979.— 431 с.
2. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязкоупругости.— М.: Наука, 1970.— 280 с.
3. *Колтунов М. А., Моргунов Б. И., Трояновский И. Е.* Вынужденные геометрические нелинейные колебания вязкоупругого тела. — Механика полимеров, 1975, № 3, с. 464—469.
4. *Лика Д. И., Рябов Ю. А.* Методы итераций и мажорирующие уравнения Ляпунова в теории нелинейных колебаний.— Кишинев : Штиинца, 1974.— 290 с.
5. *Мирсаидов М., Трояновский И. Е.* Вынужденные ассимметричные колебания вязкоупругости цилиндрической оболочки.— Механика полимеров, 1975, № 6, с. 1111—1114.
6. *Тохтаров У.* Нелинейные задачи вязкоупругости для цилиндра с подвижной границей : Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук.— М., 1973.— 20 с.
7. *Трояновский И. Е.* О построении периодических решений интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругости.— Механика полимеров, 1974, № 3, с. 234—240.
8. *Филатов А. Н.* Методы усреднения в дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнениях.— Ташкент : Фан, 1971.— 180 с.
9. *Фихтенгольц Г. М.* Курс математического анализа : В 3-х т. М. : Гостехиздат, 1949.— Т.3. 783 с.

Ташкентский
политехнический институт

Поступила в редакцию
22.03. 1982 г.