АКАДЕМИЯ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР • ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ

УКРАИНСКИЙ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

Том 34, № 6
1982

Научный журнал
основан в 1949 г.
Выходит один раз в два месяца

Киев Наукова думка

УДК 519.21

Р. В. Бойко

Предельные теоремы для ветвящегося процесса с переменным режимом, описывающего развитие популяции в лимитирующей среде

Рассмотрим процесс $\xi(t)$, описывающий эволюцию численности популяции, которая развивается таким образом: если в некоторый момент времени t в популяции существует k частиц, то за малый промежуток времени Δt каждая частица независимо от своей предыстории и от судьбы других частиц с вероятностью $\pi_m(k)\,\Delta t + o(\Delta t)$ превращается в $m = 0, 2, 3, \ldots$ частиц и не претерпевает изменения с вероятностью $1 + \pi_1(k)\,\Delta t + o(\Delta t)$, $\pi_1(k) = -\sum\limits_{k\neq 1} \pi_m(k)$.

Объектом изучения будет процесс $\xi(t) = \xi_N(t)$, у которого интенсивности размножения частиц $\pi_m(k)$ так зависят от численности популяции k: если $k > N$, где N — некоторое фиксированное целое положительное число, то $\pi_m(k) = Nk^{-1}\pi_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$; если $k \leqslant N$, то $\pi_m(k) = \pi_m$, $m = 0, 1, 2, \ldots$.

В этом случае процессу $\xi_N(t)$ можно дать физическую интерпретацию, отличную от изложенной выше, и рассматривать $\xi_N(t)$ как эволюцию численности популяции, развивающейся в среде, лимитирующие факторы которой таковы, что только ограниченное число частиц N могут развиваться, производить потомство или гибнуть. Остальные частицы находятся в некотором состоянии, которое условно можно назвать «нейтральным», и готовы начать свое развитие в любой момент времени, если позволяют условия окружающей среды, причем среди частиц, находящихся в нейтральном состоянии, устанавливается очередность развития. Таким образом, если в некоторый момент времени одна из N развивающихся частиц погибла, то одна из частиц, находящихся в нейтральном состоянии, в этот же момент времени начинает свое развитие. Развивающаяся частица за малый промежуток времени Δt превращается в m частиц с вероятностью $\pi_m \Delta t + o(\Delta t)$, $m = 0, 2, 3, \ldots$, и продолжает существовать с вероятностью $1 + \pi_1 \Delta t + o(\Delta t)$, $\pi_1 = -\sum\limits_{m\neq 1} \pi_m$.

Введем следующие обозначения:

$$P_{ij}(t) = P\{\xi(t) = j/\xi(0) = i\}, \quad \varphi(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \pi_m z^m, \quad |z| \leqslant 1,$$

$$F_i(t, z) = \sum_k P_{ik}(t)\, z^k, \quad \widetilde{P}_{ij}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} P_{ij}(t)\, dt, \quad \bar{F}_i(s, z) = \int_0^{\infty} e^{-st} F_i(t, z)\, dt.$$

Процесс $\xi_N(t)$ получается из процесса $\eta(t)$, изучавшегося в работе [1], если рассматривать процесс $\eta(t)$ без иммиграции, т. е. считать, что $v(z) \equiv 0$. Поэтому согласно [1] $F_i(t, z)$ — производящая функция переходных вероятностей процесса $\xi_N(t)$ — удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial F_i(t,z)}{\partial t} = \frac{N\varphi(z)}{z} F_i(t, z) + \frac{N\varphi(z)}{z} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k P_{ik}(t) \tag{1}$$

с начальным условием $F_i(0, z) = z^i$.

Решение уравнения (1) запишем в виде

$$F_i(t, z) = e^{t\frac{N\varphi(z)}{z}} \left(z^i + \frac{N\varphi(z)}{z} \int_0^t e^{-\tau\frac{N\varphi(z)}{z}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k P_{ik}(\tau)\, d\tau \right). \tag{2}$$

Из формул (12)—(16) работы [1] получаем представления для преобразований Лапласа переходных вероятностей $P_{ij}(t)$, $i, j \leqslant N$, процесса $\xi_N(t)$

$$\widetilde{P}_{ij}(s) = \widetilde{P}^{\text{II}}_{ij}(N, s) + \frac{s^2 \widetilde{P}^{\text{II}}_{Nj}(N, s) \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \widetilde{P}^{\text{II}}_{ik}(N, s)\, \widetilde{P}^{\text{I}}_{kN}(N, s)}{1 - s^2 \sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \widetilde{P}^{\text{II}}_{Nk}(N, s)\, \widetilde{P}^{\text{I}}_{kN}(N, s)}, \tag{3}$$

где

$$\widetilde{P}^{\text{II}}_{ij}(N, s) = \frac{1}{s} \sum_{k=1}^{N} k\pi_{j+1-k} \widetilde{P}^{\text{II}}_{ik}(N, s), \quad 0 < i \leqslant N, \quad j > N;$$

$$\widetilde{P}^{\text{II}}_{rm}(N, s) = -A_{rm}(s)\, A^{-1}(s), \quad r, m \leqslant N;$$

$A_{rm}(s)$ — алгебраическое дополнение элемента $a_{r+1,m+1}$ определителя

$$A(s) = \begin{vmatrix} -s & \pi_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \pi_1 - s & 2\pi_0 & & \vdots \\ 0 & \pi_2 & 2\pi_1 - s & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & N\pi_0 \\ 0 & \pi_N & 2\pi_{N-1} & \cdots & N\pi_1 - s \end{vmatrix};$$

$\widetilde{P}^{\text{I}}_{kN}(N, s) = \widetilde{\mathcal{P}}_{k0}(s)\, s^{-1} \widetilde{\mathcal{P}}^{-1}_{N0}(s)$, $k > N$, где $\widetilde{\mathcal{P}}_{mn}(s)$ — преобразование Лапласа переходных вероятностей $\mathcal{P}_{mn}(t)$ ветвящегося процесса с переменным режимом $\zeta(t)$, производящая функция $\varphi_k(z)$ интенсивностей размножения которого имеет вид $\varphi_k(z) = Nk^{-1}\varphi(z)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Процесс $\zeta(t)$ изучался в работе [2], где, в частности, установлено, что

$$\widetilde{\mathcal{P}}_{k0}(s) = s^{-1} u^k_N(s), \quad \lim_{s \to 0} u^k_N(s) = \rho^k, \tag{4}$$

$u_N(s)$ — корень уравнения $sz = N\varphi(z)$, модуль которого меньше единицы при $s > 0$, ρ — наименьший неотрицательный корень уравнения $\varphi(z) = 0$.

Рассмотрим поведение процесса $\xi_N(t)$ при $t \to \infty$, когда производящая функция интенсивностей размножения $\varphi(z)$ такова, что $\varphi'(1) > 0$. Не ограничивая общности, предположим, что $\xi_N(0) = 1$.

Теорема 1. *Если $\varphi'(1) > 0$, $\varphi''(1) < \infty$, то при $t \to \infty$ распределение процесса $\xi_N(t)/t$ слабо сходится к предельному, имеющему точки роста лишь в нуле и в точке $N\varphi'(1)$, скачки распределения равны соответственно ρ и $1-\rho$, где ρ — вероятность вырождения процесса $\xi_N(t)$, равная наименьшему неотрицательному корню уравнения $\varphi(z) = 0$.*

Для доказательства теоремы следует показать, что в условиях теоремы

$$\lim_{t\to\infty} Me^{-st^{-1}\xi_N(t)} = e^{-sN\varphi'(1)}(1-\rho) + \rho. \tag{5}$$

Докажем соотношение (5). Очевидно, что

$$Me^{-st^{-1}\xi_N(t)} = F_1(t, z(t)) =$$

$$= e^{tN\varphi(z(t))/z(t)}\left(z(t) - \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\int\limits_0^t e^{-\tau N\varphi(z(t))/z(t)}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k-N}{N}z^k(t)P_{1k}(\tau)\,d\tau\right), \tag{6}$$

где $z(t) = \exp\{-s/t\}$. Далее, так как при $t\to\infty$ $\varphi(\exp\{-s/t\}) = -st^{-1}\varphi'(1) + o(t^{-1})$, то

$$\lim_{t\to\infty}\exp\{tN\varphi(z(t))/z(t)\} = \exp\{-sN\varphi'(1)\}. \tag{7}$$

Интегрируя по частям, перепишем формулу (6) в виде

$$F_1(t, z(t)) = e^{t\frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}}\left(z(t) - e^{-t\frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k-N}{N}z^k(t)P_{1k}(t) + \frac{1-N}{N}z(t) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^t e^{-\tau\frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}}\sum_{k=0}^{N-1}\frac{k-N}{N}z^k(t)P'_{1k}(\tau)\,d\tau\right). \tag{8}$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобится следующее утверждение.

Лемма. *Если $\varphi'(1)$ существует, то:*

а) $\lim\limits_{t\to\infty} P_{i0}(t) = \rho^i$,

где ρ — наименьший неотрицательный корень уравнения $\varphi(z) = 0$, $\rho = 1$, когда $\varphi'(1) \leqslant 0$, и $0 < \rho < 1$, когда $\varphi'(1) > 0$;

б) $\lim\limits_{t\to\infty} P_{ij}(t) = 0$, $j \neq 0$, $i, j \leqslant N$.

Доказательство. Утверждение б) следует из того, что при $j \neq 0$, $i, j \leqslant N$

$$\lim_{t\to\infty} P_{ij}(t) = \lim_{s\to 0} s\widetilde{P}_{ij}(s) = 0,$$

так как согласно (3) $\lim\limits_{s\to 0} s\widetilde{P}^{\text{II}}_{ij}(N, s) = 0$ при $j \neq 0$ и

$$\lim_{s\to 0} s^2\sum_{k=N+1}^{\infty}\widetilde{P}^{\text{II}}_{ik}(N, s)\widetilde{P}^{\text{I}}_{kN}(N, s) = \lim_{s\to 0} s\sum_{k=N+1}^{\infty}\widetilde{P}^{\text{II}}_{ik}(N, s)\rho^{k-N} <$$

$$< \lim_{s\to 0} s\sum_{k=N+1}^{\infty}\widetilde{P}^{\text{II}}_{ik}(N, s) = \lim_{s\to 0} s\left(\frac{1}{s} - \sum_{k=0}^{N}\widetilde{P}^{\text{II}}_{ik}(N, s)\right) = 1 - \lim_{s\to 0} s\widetilde{P}^{\text{II}}_{i0}(N, s) < 1.$$

Замечание. Используя представление (3), нетрудно убедиться, что при $\varphi'(1) = 0$ $\lim\limits_{s\to 0}\widetilde{P}_{ij}(s) = c_j$, $j \neq 0$, $j \leqslant N$, где c_j — некоторая константа.

Докажем утверждение а). Легко видеть, что

$$\int_0^\infty e^{-st} F_i(t, z)\, dt = \frac{z^{i+1} + N\varphi(z) \sum\limits_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k \widetilde{P}_{ik}(s)}{sz - N\varphi(z)}. \tag{9}$$

По теореме Руше функция $sz - N\varphi(z)$ имеет внутри единичного круга при $s > 0$ только один нуль $u_N(s)$. А так как $\widetilde{F}_i(s, z)$ сходится в области $|z| \leqslant 1$, $\operatorname{Re} s > 0$, то должны совпадать нули числителя и знаменателя в правой части формулы (9). Следовательно,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} u_N^k(s) \widetilde{P}_{ik}(s) = -\frac{u_N^{i+1}(s)}{N\varphi(u_N(s))} = -\frac{u_N^i(s)}{s}. \tag{10}$$

Тогда в силу соотношения (4) и утверждения б)

$$\lim_{s\to 0} s \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} u_N^k(s) \widetilde{P}_{ik}(s) = -\lim_{s\to 0} s \widetilde{P}_{i0}(s) = -\lim_{s\to 0} u_N^i(s) = -\rho^i.$$

Продолжим доказательство теоремы. В силу леммы и соотношения (7)

$$\lim_{t\to\infty} e^{-\frac{tN\varphi(z(t))}{z(t)}} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{N-k}{N} z^k(t) P_{1k}(t) + \frac{1-N}{N} z(t) = e^{-sN\varphi'(1)}\rho + \frac{1-N}{N}. \tag{11}$$

Используя теорему о среднем, получаем

$$\begin{aligned}
&\int_0^t \exp\left\{-\tau \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k(t) P'_{1k}(\tau)\, d\tau = \\
&= \int_0^{\sqrt{t}} \exp\left\{-\tau \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k(t) P'_{1k}(\tau)\, d\tau + \\
&+ \int_{\sqrt{t}}^{t} \exp\left\{-\tau \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k(t) P'_{1k}(\tau)\, d\tau = \\
&= \exp\left\{-\tau^* \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k(t) (P_{1k}(\sqrt{t}) - P_{1k}(0)) + \\
&+ \int_{\sqrt{t}}^{t} \exp\left\{-\tau \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k(t) P_{1k}(\tau)\, d\tau,
\end{aligned} \tag{12}$$

где $0 \leqslant \tau^* \leqslant \sqrt{t}$. Учитывая то, что $\varphi(z(t)) = -st^{-1}\varphi'(1) + o(t^{-1})$ при $t \to \infty$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} \exp\left\{-\tau^* \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k(t) (P_{1k}(\sqrt{t}) - P_{1k}(0)) = -\rho - \frac{1-N}{N}. \tag{13}$$

Кроме того,

$$\int\limits_{\sqrt{t}}^{t} \exp\left\{-\tau \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} P'_{1k}(\tau)\, d\tau <$$

$$< 2e^{sN\varphi'(1)} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} z^k(t) \left(P_{1k}(t) - P_{1k}(\sqrt{t})\right)$$

и $\lim\limits_{t\to\infty} (P_{1k}(t) - P_{1k}(\sqrt{t})) = 0$, поэтому

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_0^t \exp\left\{-\tau \frac{N\varphi(z(t))}{z(t)}\right\} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{k-N}{N} P'_{1k}(\tau)\, d\tau = -\rho - \frac{1-N}{N}, \quad (14)$$

что вместе с соотношениями (5), (7), (8), (11) доказывает теорему 1.

Теперь рассмотрим поведение процесса $\xi_N(t)$ при $t\to\infty$ в том случае, когда $\varphi'(1) = 0$.

В лемме доказано, что вероятность вырождения процесса $\xi_N(t)$ при $\varphi'(1) = 0$ равна единице.

Изучим асимптотику вероятности вырождения процесса.

Теорема 2. *Если* $\varphi'(1) = 0$, $\varphi'''(1) < \infty$, *то при* $t\to\infty$ $P_{10}(t) = 1 - \sqrt{2/(\pi N\varphi''(1)t)} + o(1/\sqrt{t})$.

Доказательство. Из формулы (10) следует, что

$$\frac{1-\widetilde{P}_{10}(s)}{s} = \frac{1-u_N(s)}{s} - \sum_{k=2}^{N-1} u_N^k(s) \frac{k-N}{N} \widetilde{P}_{1k}(s). \quad (15)$$

По теореме 4 работы [1]

$$s^{-1}(1-u_N(s)) = \sqrt{2/(N\varphi''(1)s)} + o(s^{-1/2}) \quad (16)$$

при $s\to 0$. Как уже отмечалось выше,

$$\lim_{s\to 0} u_N(s) = 1, \quad \lim_{s\to 0} \widetilde{P}_{1k}(s) = c_k, \quad 0 < k < N,$$

поэтому при $s\to 0$ $(1-\widetilde{P}_{10}(s))/s = \sqrt{2/(N\varphi''(1)s)} + o(1/\sqrt{s})$.

Тогда по тауберовой теореме (см. [3] § 5, гл. XIII) в силу монотонности функции $1-P_{10}(t)$ при $t\to\infty$ $1-P_{10}(t) = \sqrt{2/(\pi N\varphi''(1)t)} + o(1/\sqrt{t})$. Теорема доказана.

Следующий этап исследования — изучение поведения процесса $\xi_N(t)$ при условии его невырождения, когда $t\to\infty$ в критическом случае.

Теорема 3. *Если* $\varphi'(1) = 0$, $\varphi'''(1) < \infty$, *то при* $t\to\infty$ *распределение* $R_t(x)$ *нормированного процесса* $\xi_N(t)/\sqrt{N\varphi''(1)t}$ *при условии его невырождения к моменту времени t слабо сходится к распределению Релея*

$$\lim_{t\to\infty} P\{\xi_N(t)/\sqrt{N\varphi''(1)t} < x/\xi_N(t) > 0\} = \lim_{t\to\infty} R_t(x) = R(x) = \int\limits_0^x ue^{-u^2/2} du.$$

Сформулированное утверждение будет доказано, если мы покажем, что преобразование Лапласа случайной величины $\xi_N(t)/\sqrt{N\varphi''(1)t}$ при условии невырождения сходится при $t\to\infty$ к преобразованию Лапласа случайной величины, имеющей распределение Релея, т. е. (см. [4])

$$\lim_{t\to\infty} M\left\{\exp\left\{\frac{-s\xi_N(t)}{\sqrt{N\varphi''(1)t}}\right\}/\xi_N(t) > 0\right\} =$$

$$= 1 - s\sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp\left\{\frac{s^2}{2}\right\}\left(1 - \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^s e^{-\frac{u^2}{2}} du\right). \quad (17)$$

Используя формулу (2), получаем

$$M\left\{\exp\left\{-\frac{s\xi_N(t)}{\sqrt{N\varphi''(1)t}}\right\}/\xi_N(t)>0\right\}=1+\exp\left\{t\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\right\}\left(z_t-1+\right.$$

$$+\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\int_0^t\exp\left\{-\tau\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\right\}(1-P_{10}(\tau))\,d\tau+$$

$$\left.+\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\int_0^t\exp\left\{-\tau\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\right\}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k-N}{N}z_t^kP_{1k}(\tau)\,d\tau\right)(1-P_{10}(t))^{-1},\quad(18)$$

где $z_t=\exp\{-s/\sqrt{N\varphi''(1)t}\}$.

Так как при $t\to\infty$

$$z_t-1=-s(N\varphi''(1)t)^{-1/2}+o(t^{-1/2}),\quad N\varphi(z_t)z_t^{-1}=s^2/(2t)+o(1/t),\quad(19)$$

то

$$\lim_{t\to\infty}\exp\{tN\varphi(z_t)z_t^{-1}\}=\exp\{-s^2/2\}.\quad(20)$$

В силу теоремы 2 при $t\to\infty$

$$\frac{N\varphi(z_t)}{z_t(1-P_{10}(t))}=\frac{s^2}{2}\sqrt{\frac{\pi N\varphi''(1)}{2t}}+o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right),\quad\lim_{t\to\infty}\frac{z_t-1}{1-P_{10}(t)}=-s\sqrt{\frac{\pi}{2}}.\quad(21)$$

Далее, используя теорему о среднем, получаем

$$\int_0^t\exp\left\{-\tau\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\right\}(1-P_{10}(\tau))\,d\tau=(1+o(1))\left(\int_0^{t^{1/4}}\exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}(1-P_{10}(\tau))d\tau+\right.$$

$$\left.+\int_{t^{1/4}}^t\exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}\frac{(1-P_{10}(\tau))}{\sqrt{\tau}}\sqrt{\tau}\,d\tau\right)=$$

$$=(1+o(1))\left(\int_0^{t^{1/4}}\exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}(1-P_{10}(\tau)\,d\tau+\right.$$

$$\left.+(1-P_{10}(\tau^*))\sqrt{\tau^*}\int_{t^{1/4}}^t\exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}\right),$$

где $t^{1/4}\leqslant\tau^*\leqslant t$, кроме того, при $t\to\infty$

$$(1-P_{10}(\tau^*))\sqrt{\tau^*}=\sqrt{\frac{2}{\pi N\varphi''(1)}}+o(1),$$

$$\int_0^{t^{1/4}}\exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}(1-P_{10}(\tau))\,d\tau=O(t^{1/4})$$

и

$$\int_{t^{1/4}}^t\exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}=\frac{2\sqrt{t}}{s}\int_0^s e^{-u^2/2}du+O(t^{1/8}),$$

потому что

$$\int\limits_{t^{1/4}}^{t} \exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} = \int\limits_0^t \exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} - \int\limits_0^{t^{1/4}} \exp\left\{-\frac{\tau s^2}{2t}\right\}\frac{d\tau}{\sqrt{\tau}} =$$

$$= \frac{2\sqrt{t}}{s}\int\limits_0^s c^{-u^2/2}du + O(t^{1/8}).$$

Следовательно,

$$\int\limits_0^t \exp\left\{-\tau\,\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\right\}(1 - P_{10}(\tau))\,d\tau = \frac{2}{s}\sqrt{\frac{2}{\pi N\varphi''(1)\,t}}\int\limits_0^s e^{-u^2/2}du + O(t^{1/4}),$$

поэтому, учитывая оценку (21), получаем

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N\varphi(z_t)}{z_t(1 - P_{10}(t))}\int\limits_0^t \exp\left\{-\tau\,\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\right\}(1 - P_{10}(\tau))\,d\tau = s\int\limits_0^s e^{-u^2/2}du. \quad (22)$$

Из замечания к доказательству леммы следует, что функции $P_{1k}(t)$, $0 < k \leqslant N$, интегрируемы на интервале $(0, \infty)$. Поэтому

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\int\limits_0^\infty \exp\left\{-\tau\,\frac{N\varphi(z_t)}{z_t}\right\}\sum_{k=1}^{N-1}\frac{k - N}{N}\,z_t^k P_{1k}(\tau)\,d\tau\,(1 - P_{10}(t))^{-1} = 0. \quad (23)$$

Учитывая формулы (20)—(23), убеждаемся в том, что имеет место соотношение (17). Теорема доказана.

1. *Бойко Р. В.* Ветвящиеся процессы с иммиграцией с переменным режимом и некоторые системы массового обслуживания. — В кн.: Случайные процессы в задачах математической физики. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1979, с. 36—56.
2. *Бойко Р. В.* Предельные теоремы для одного ветвящегося процесса с переменным режимом. — В кн.: Вероятностные методы бесконечномерного анализа. Киев : Ин-т математики АН УССР, 1980, с. 13—24.
3. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения: В 2-х т. — М. : Мир, 1967. — Т. 2. 752 с.
4. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М. : Наука, 1971.—1108 с.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
28.04.1981 г.