УДК 519.21

Т. И. Исакова

О стохастических дифференциальных уравнениях с нерегулярными коэффициентами

В статье построено решение стохастического дифференциального уравнения

$$dx(t) = a(t, x(t))\,dt + B(t, x(t))\,dw(t) \tag{1}$$

с ограниченной измеримой равномерно невырожденной матрицей диффузии $b(t, x) = B(t, x)\,B^*(t, x)$ и вектором переноса $a(t, x)$, удовлетворяющим некоторым условиям интегрируемости. Показано также, что при фиксированной матрице диффузии сходимость векторов переноса в некоторой метрике влечет сходимость соответствующих мер. Случай непрерывной матричной функции $b(t, x)$ рассмотрен в [2].

1. Пусть для $t \geqslant 0$, $x \in R^m$ (R^m — m-мерное евклидово пространство) задана функция $b(t, x)$, значениями которой служат симметричные матрицы порядка $m \times m$, удовлетворяющая условиям:

(I) $b(t, x)$ измерима по Борелю относительно (t, x);

(II) существуют положительные постоянные C_1 и C_2 такие, что при всех $t \geqslant 0$, $x, \lambda \in R^m$ $C_1 |\lambda|^2 \leqslant (b(t, x)\lambda, \lambda) \leqslant C_2 |\lambda|^2$;

(III) для любых $t_0 \geqslant 0$, $x_0 \in R^m$ существуют такие $h > 0$, $r > 0$ и положительно определенный оператор C, что

$$\sup_{\substack{t \in [t_0, t_0 + h] \\ |x - x_0| \leqslant r}} \operatorname{tr}(b(t, x) - C)^2 \leqslant \| C^{-1} \|^{-2},$$

$\operatorname{tr} A$ — след матрицы A.

Пусть для функции $a(t, x): [0, \infty) \times R^m \to R^m$ выполнено условие

(IV) при некотором $p \geqslant 2m + 2$ и всех $T < \infty$

$$\int_0^T \int_{R^m} |a(t, x)|^p\, dt\, dx < \infty.$$

Обозначим через Ω пространство непрерывных функций $x(t)$, $t \in [0, \infty)$, со значениями в R^m, а через $\mathcal{M}_t^s$ — минимальную σ-алгебру подмножеств Ω, содержащую все множества вида $\{x(\cdot) : x(u) \in \Gamma\}$, где $u \in [s, t]$, Γ — борелевское множество R^m. Пусть $\mathcal{M}^s$ — минимальная σ-алгебра подмножеств Ω, содержащая σ-алгебры $\mathcal{M}_t^s$ при $t \in [s, \infty)$.

Условия (I) и (II) гарантируют существование слабого решения уравнения (1) с $a(t, x) \equiv 0$ и матрицей диффузии $b(t, x)$ (см. [3], с. 122); иными словами, при каждых $s \in [0, \infty)$ и $x \in R^m$ на пространстве $(\Omega, \mathcal{M}^s)$ существует вероятностная мера Q_{sx} такая, что $Q_{sx}\{x(s) = x\} = 1$ и процесс $\{x(t) - x(s), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx}\}$, $t \geqslant s$, — квадратично интегрируемый мартингал с характеристикой $\int_s^t b(\tau, x(\tau))\,d\tau$.

Согласно теореме единственности работы [4] из условия (III) вытекает, что такая мера единственна. Кроме того, в [5] доказано, что процесс $(x(t), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$ является марковским.

Для того чтобы получить решение уравнения (1), согласно теореме об абсолютно непрерывной замене меры нужно рассмотреть меру P_{sx} на $(\Omega, \mathcal{M}^s)$, сужения которой на σ-алгебры $\mathcal{M}^s_T$ при $T \in [s, \infty)$ абсолютно непрерывны относительно соответствующих сужений меры Q_{sx}, причем

$$\left.\frac{dP_{sx}}{dQ_{sx}}\right|_{M^s_T} = R_s(T),$$

где

$$R_s(t) = \exp\left\{\int_s^t (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), dx(u)) -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{2}\int_s^t (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), a(u, x(u)))\, du\right\}.$$

Мера P_{sx} будет искомой, если выполнено соотношение

$$M_{sx} R_s(T) = 1 \tag{2}$$

при всех $T > s$, где M_{sx} обозначает усреднение по мере Q_{sx}.

Лемма 1. *Пусть матрица $b(t, x)$ удовлетворяет условиям (I)—(III) и $\varphi(t, x)$ — неотрицательная борелевская функция, $t \geqslant 0$, $x \in R^m$, для которой*

$$\int_0^T \int_{R^m} \varphi^p(t, x)\, dt dx < \infty$$

при некотором $p \geqslant m+1$ и всех $T < \infty$. Тогда

$$M_{sx}\int_s^t \varphi(\tau, x(\tau))\, d\tau \leqslant C_T \left(\int_s^t \int_{R^m} \varphi^p(\tau, y)\, d\tau dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

где постоянная C_T зависит лишь от p, m и $C_T < \infty$ при $T < \infty$.

Доказательство. Положим $h(\tau, x) = \chi_{[s,t]}(\tau)\, \varphi(\tau, x)$ ($\chi_{[s,d]}$ — индикатор интервала $[s, d]$). Тогда

$$M_{sx}\int_s^t \varphi(\tau, x(\tau))\, d\tau = M_{sx}\int_0^\infty h(\tau, x(\tau))\, d\tau.$$

Заметим, что условия леммы позволяют применить результат, доказанный в [6]. Возьмем $\lambda > 0$, $K > 0$. Обозначим, следуя [6],

$$\lambda + K\sqrt{\lambda} = \mu, \quad \Phi_t = \frac{1}{2}\int_0^t \operatorname{tr} B(\tau, x(\tau))\, B^*(\tau, x(\tau))\, d\tau,$$

$$\Psi_t = \sqrt[m+1]{\det B^2(t, x(t))}.$$

В силу условий (I) — (III) $\Phi_t \leqslant L_1 T$ и $\Psi_t \geqslant L_2$ при $t \leqslant T < \infty$. Значит,

$$M_{sx}\int_0^\infty e^{-\mu\Phi_t - \mu t}\Psi_t h(t, x(t))\, dt \geqslant K_T M_{sx}\int_0^\infty h(t, x(t))\, dt.$$

Согласно [6] имеет место оценка

$$M\int_0^\infty e^{-\mu\Phi_t - \mu t}\Psi_t h(t, x(t))\, dt \leqslant \mathcal{N}\left(\int_0^\infty e^{-\lambda(m+1)t} dt \int_{R^m} h^p(x, t)\, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant m+1$ и постоянная $\mathcal{N}$ зависит только от m, p, λ, K. Поэтому

$$M_{sx} \int_s^t \varphi(\tau, x(\tau))\, d\tau \leqslant C_T \left(\int_s^t \int_{R^m} \varphi^p(t, x)\, dxdt \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $p \geqslant m+1$, $C_T = \mathcal{N}/K_T$. Лемма доказана.

Если функция $a(t, x)$ удовлетворяет условию (IV), а функция $b(t, x)$ — условиям (I)—(III), то $b^{-1}(t, x)\, a(t, x)$ также удовлетворяет условию (IV) и с помощью неравенства из леммы 1 можно показать, что при всех $s \leqslant T < \infty$, $x \in R^m$

$$Q_{sx} \left\{ \int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), a(u, x(u)))\, du < \infty \right\} = 1$$

и определен стохастический интеграл

$$\int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), dx(u)),$$

который представляет собой квадратично интегрируемый $(\mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$-мартингал с характеристикой

$$\int_s^t (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), a(u, x(u)))\, du.$$

Итак, будем рассматривать процесс $R_s(t)$. Известно (см., напр., [7]), что процесс $(R_s(t), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$ — супермартингал.

Лемма 2. *Предположим, что функция $b(t, x)$ удовлетворяет условиям (I)—(III), а функция $a(t, x)$ — условию (IV). Тогда процесс $(R_s(t), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$, $t \geqslant s$, является мартингалом.*

Доказательство. На пространстве Ω существует m-мерный процесс $w_s(t)$, $t \geqslant s$, для которого $w_s(s) = 0$, процесс $(w_s(t), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$ является винеровским и при всех $t \in [s, \infty)$ Q_{sx}-почти наверное

$$x(t) = x + \int_s^t B(u, x(u))\, dw_s(u).$$

Согласно [2] для доказательства леммы достаточно показать, что при $s \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T < \infty$ выполнено неравенство

$$M_{sx} \left\{ \int_{t_1}^{t_2} (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), a(u, x(u)))\, du / \mathcal{M}_{t_1}^s \right\} \leqslant \rho(t_1, t_2), \tag{3}$$

где $\rho(s, t)$ — неслучайная функция интервала, удовлетворяющая условиям:

а) $\rho(t_1, t_2) \leqslant \rho(t_3, t_4)$, если $(t_1, t_2) \subset (t_3, t_4)$,

б) $\lim\limits_{h \downarrow 0} \sup\limits_{\substack{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \\ t - s \leqslant h}} \rho(s, t) = \varkappa$, $\varkappa \geqslant 0$.

Левая часть неравенства (3) в силу марковости процесса $(x(t), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$ равна

$$M_{t_1, x(t_1)} \int_{t_1}^{t_2} (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), a(u, x(u)))\, du,$$

а в силу условия (II) и леммы 1 последнее выражение не превосходит $C_1^{-1} C_T \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{R^m} |a(u, y)|^p du dy \right)^{\frac{2}{p}}$. Значит, можно положить

$$\rho(t_1, t_2) = C_1^{-1} C_T \left(\int_{t_1}^{t_2} \int_{R^m} |a(u, y)|^p du dy \right)^{\frac{2}{p}}, \quad s \leqslant t_1 \leqslant t_2 \leqslant T, \quad p \geqslant 2m+2.$$

Очевидно, что свойства а), б) выполнены, причем

$$\lim_{h\downarrow 0}\sup_{\substack{t_2-t_1\leqslant h\\ s\leqslant t_1\leqslant t_2\leqslant T}}\rho(t_1,t_2)=0.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Если выполнены условия леммы 2, то при всех $0\leqslant s\leqslant T<\infty$, $x\in R^m$ имеет место неравенство $M_{sx}(R_s(t))^k<\mathcal{N}_T$, где постоянная зависит лишь от C_1, C_2, k, T и от $a(t,y)$; $\mathcal{N}_T<\infty$ при $T<\infty$.

Докажем это утверждение. Обозначим

$$R_s^{c,d}(t)=\exp\left\{c\int_s^t(b^{-1}(u,x(u))\,a(u,x(u)),\,dx(u))-\right.$$

$$\left.-\frac{d}{2}\int_s^t(b^{-1}(u,x(u))\,a(u,x(u)),a(u,x(u)))\,du\right\},$$

где c и d — действительные числа. Тогда

$$M_{sx}(R_s(t))^k=M_{sx}R_s^{k,k}(t)=M_{sx}R_s^{k,\gamma k^2}(t)\,R_s^{0,k-\gamma k^2}(t),\quad \gamma\in(1,\infty).$$

Применяя неравенство Гельдера, получаем

$$M_{sx}(R_s(t))^k\leqslant[M_{sx}R_s^{\gamma k,\gamma^2k^2}]^{\frac{1}{\gamma}}[M_{sx}R_s^{0,\beta(k-\gamma k^2)}(t)]^{\frac{1}{\beta}},$$

где $\beta=\gamma/(1-\gamma)$. Процесс $(R_s^{\gamma k,\gamma^2k^2}(t),\mathcal{M}_t^s,Q_{sx})$ согласно лемме 2 является мартингалом. Значит, $M_{sx}R_s^{\gamma k,\gamma^2k^2}(t)\equiv 1$, $t\geqslant s$, $x\in R^m$. Поэтому

$$M_{sx}(R_s(t))^k\leqslant[M_{sx}R_s^{0,\beta(k-\gamma k^2)}(t)]^{\frac{1}{\beta}}=$$

$$=\left[M_{sx}\exp\left\{\frac{\beta(\gamma k^2-k)}{2}\int_s^t(b^{-1}(u,x(u))\,a(u,x(u)),\,a(u,x(u)))\,du\right\}\right]^{\frac{1}{\beta}}\leqslant$$

$$\leqslant\left[M_{sx}\exp\left\{\frac{\gamma k(\gamma k-1)}{2C_1(\gamma-1)}\int_s^T|a(u,x(u))|^2du\right\}\right]^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}.$$

Обозначим $\lambda=\gamma k(\gamma k-1)/[2C_1(\gamma-1)]$. Разобьем отрезок $[0,T]$ на части точками $0=t_0<t_1<\ldots<t_n=T$, чтобы

$$\lambda C_T\max_k\left(\int_{t_{k-1}}^{t_k}\int_{R^m}|a(u,y)|^p\,du\,dy\right)^{\frac{2}{p}}\leqslant 1-\varepsilon,\quad \varepsilon\in(0,1).$$

Будем считать, что $s\in[t_k,t_{k+1})$. Имеем

$$M_{sx}\exp\left\{\lambda\int_s^T|a(u,x(u))|^2du\right\}\leqslant\prod_{i=1}^k\left[1-\lambda C_T\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\int_{R^m}|a(u,y)|^p\,du\,dy\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{-1}\times$$

$$\times\left[1-\lambda C_T\left(\int_{t_k}^{s}\int_{R^m}|a(u,y)|^p\,du\,dy\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{-1}\left[1-\lambda C_T\left(\int_s^{t_{k+1}}\int_{R^m}|a(u,y)|^p\,du\,dy\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{-1}\times$$

$$\times\prod_{i=k+1}^{n-1}\left[1-\lambda C_T\left(\int_{t_i}^{t_{i+1}}\int_{R^m}|a(u,y)|^p\,du\,dy\right)^{\frac{2}{p}}\right]^{-1}\leqslant\varepsilon^{n+1}.$$

Доказательство завершено.

Замечание 2. Пусть заданы функции $b(t, x)$, последовательность функций $a_n(t, x)$, $n = 1, 2, \ldots$, и при каждом n пара функций $b(t, x)$, $a_n(t, x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.

Обозначим через $R_s^{(n)}(t)$ экспоненциальный мартингал, построенный по $b(t, x)$ и $a_n(t, x)$. Если при некотором $p \geqslant 2m + 2$ и всех $T < \infty$

$$\lim_{h \downarrow 0} \sup_n \sup_{\substack{0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T \\ t-s \leqslant h}} \int_s^t \int_{R^m} |a_n(\tau, x)|^p d\tau dx = 0, \tag{4}$$

то $\sup\limits_n M_{sx}(R_s^{(n)}(t))^k \leqslant H_T$, $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T < \infty$, $x \in R^m$, $H_T < \infty$ при $T < \infty$.

Лемма 3. *Пусть матричнозначная функция* $b(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in R^m$, *удовлетворяет условиям (I) — (III), а функция* $a(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in R^m$, *со значениями в* R^m — *условию (IV). Тогда при каждых* $s \geqslant 0$ *и* $x \in R^m$ *существует единственная вероятностная мера* P_{sx} *на пространстве* $(\Omega, \mathcal{M}^s)$, *сужения которой на σ-алгебры* $\mathcal{M}_T^s$ *при* $T < \infty$ *определяются формулой*

$$P_{sx}(A) = \int_A R_s(T) Q_{sx}(d\omega), \quad A \in \mathcal{M}_T^s.$$

Доказательство. Согласно лемме 2 процесс $(R_s(T), \mathcal{M}_T^s, Q_{sx})$ является мартингалом, так что $M_{sx} R_s(T) \equiv 1$ при всех $0 \leqslant s \leqslant T < \infty$, $x \in R^m$. Положим

$$P_{sx}^T(A) = \int_A R_s(T) Q_{sx}(d\omega), \quad A \in \mathcal{M}_T^s.$$

P_{sx}^T является вероятностной мерой на σ-алгебре $\mathcal{M}_T^s$. При этом, если $T_2 > T_1 \geqslant s$, сужение меры $P_{sx}^{T_2}$ на σ-алгебру $\mathcal{M}_{T_1}^s$ совпадает с мерой $P_{sx}^{T_1}$. Действительно, так как $R_s(T_2) = R_s(T_1) R_{T_1}(T_2)$, то

$$P_{sx}^{T_2}(A) = \int_A R_s(T_2) Q_{sx}(d\omega) = M_{sx} \chi_A R_s(T_2) =$$

$$= M_{sx}\{\chi_A R_s(T) M_{sx}\{R_{T_1}(T_2)/\mathcal{M}_{T_1}^s\}\} = M_{sx} \chi_A R_s(T_1).$$

Здесь $A \in \mathcal{M}_{T_1}^s$, χ_A — индикатор множества A.

Далее, σ-алгебра $\mathcal{M}^s$ является наименьшей σ-алгеброй, содержащей все σ-алгебры $\mathcal{M}_T^s$ при $T < \infty$. Кроме того, пространство $(\Omega, \mathcal{M}_T^s)$ — стандартное, т. е. существует такое полное сепарабельное метрическое пространство Ω', что его σ-алгебра борелевских подмножеств и σ-алгебра $\mathcal{M}_T^s$ σ-изоморфны между собой. Если $s \leqslant T_1 < T_2 < \ldots$ и множества $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \ldots$, причем $A_n \in \mathcal{M}_{T_n}^s$ и A_n является атомом σ-алгебры $\mathcal{M}_{T_n}^s$, тогда $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n \neq \varnothing$. Согласно теореме V.4.2 из [8] в этом случае можно утверждать, что мера P_{sx} существует и единственна. Доказательство завершено.

Лемма 4. *Процесс* $(x(t), \mathcal{M}_t^s, P_{sx})$ *является марковским.*

Доказательство. Возьмем $0 \leqslant s \leqslant t_1 \leqslant t_2$ и $A \in \mathcal{M}_{t_1}^s$. Тогда в силу марковости процесса $(x(t), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$

$$\int_A \chi_\Gamma(x(t_2)) P_{sx}(d\omega) = \int_A \chi_\Gamma(x(t_2)) R_s(t_2) Q_{sx}(d\omega) =$$

$$= \int_A R_s(t_1) M_{sx}\{\chi_\Gamma(x(t_2)) R_{t_1}(t_2)/\mathcal{M}_{t_1}^s\} Q_{sx}(d\omega) = \int_A M_{t_1 x(t_1)}\{\chi_\Gamma(x(t_2)) R_{t_1}(t_2)\} P_{sx}(d\omega).$$

Поскольку

$$M_{t_1 x(t_1)}\{\chi_\Gamma(x(t_2)) R_{t_1}(t_2)\} = \int_\Omega \chi_\Gamma(x(t_2)) R_{t_1}(t_2) Q_{t_1 y}(d\omega)|_{y = x(t_1)} =$$

$$= \int_\Omega \chi_\Gamma(x(t_2)) P_{t_1 y}(d\omega)|_{y = x(t_1)} = P_{t_1 x(t_1)}\{x(t_2) \in \Gamma\},$$

то P_{sx}-почти наверное

$$P_{sx}\{x(t_2)\in\Gamma/\mathcal{M}_{t_1}^s\}=P_{t_1x(t_1)}\{x(t_2)\in\Gamma\}.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Процесс* $\xi_s(t)=x(t)-x(s)-\int\limits_s^t a(\tau,x(\tau))\,d\tau,\ t\geqslant s$ *является квадратично интегрируемым* $(\mathcal{M}_t^s,P_{sx})$*-мартингалом с характеристикой* $\int\limits_s^t b(u,x(u))\,du$.

Доказательство. Упомянутый в доказательстве леммы 2 процесс $w_s(t)$ можно представить в виде

$$w_s(t)=\int\limits_s^t B^{-1}(\tau,x(\tau))\,dx(\tau),\quad t\in[0,T].$$

Для процесса

$$R_s(t)=\exp\left\{\int\limits_s^t(B^{-1}(\tau,x(\tau))\,a(\tau,x(\tau)),\,dw_s(\tau))-\frac{1}{2}\int\limits_s^t|B^{-1}(\tau,x(\tau))\,a(\tau,x(\tau))|^2d\tau\right\}$$

выполнено (2) для $x\in R^m$, $s\leqslant T<\infty$. Тогда

$$P_{sx}(A)=\int\limits_A R_s(T)\,dQ_{sx}(\omega)$$

является вероятностной мерой на $(\Omega,\mathcal{M}_T^s)$. Для нее $P_{sx}\{x(s)=x\}=1$ и процесс $(\tilde{w}_s(t),\mathcal{M}_t^s,P_{sx})$, где $\tilde{w}_s(t)=w_s(t)-\int\limits_s^t B^{-1}(\tau,x(\tau))\,a(\tau,x(\tau))\,d\tau$, является по теореме Гирсанова винеровским. Но тогда P_{sx}-почти наверное

$$x(t)=x+\int\limits_s^t B(\tau,x(\tau))\,dw_s(\tau)=x+\int\limits_s^t a(\tau,x(\tau))\,d\tau+\int\limits_s^t B(\tau,x(\tau))\,d\tilde{w}_s(\tau).$$

Тем самым доказано, что процесс $\xi_s(t)$ является квадратично интегрируемым мартингалом относительно $(\mathcal{M}_t^s,P_{sx})$ с характеристикой $\int\limits_s^t b(u,x(u))\,du$, что и требовалось.

Из доказанных утверждений вытекает следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть для матричнозначной функции* $b(t,x)$ *выполнены условия* (*I*)—(*III*), *а для функции* $a(t,x)$ *со значениями в* R^m — *условие* (*IV*). *Тогда* при *любых* $s\geqslant 0$ *и* $x\in R^m$ *на пространстве* $(\Omega,\mathcal{M}^s)$ *существует вероятностная мера* P_{sx}, *для которой* $P_{sx}\{x(s)=x\}=1$ *и процесс* $x(t)-x(s)-\int\limits_s^t a(u,x(u))\,du$ *является квадратично интегрируемым мартингалом относительно* $(\mathcal{M}_t^s,P_{sx})$ *с характеристикой* $\int\limits_s^t b(u,x(u))\,du$.

Замечание 3. Если выполнены условия (I)—(IV), то, применяя неравенство Гельдера и учитывая лемму 2 и замечание 1, легко получить, что для всякой неотрицательной борелевской функции $f(t,x)$, для которой при некотором $q\geqslant m+1$

$$\int\limits_0^T\int\limits_{R^m}(f(t,y))^q\,dt\,dy<\infty,$$

справедлива оценка

$$\tilde{M}_{sx}\int_s^t f(u,x(u))\,du \leqslant C_T'\left(\int_s^t\int_{R^m}(f(u,y))^q du dy\right)^{\frac{1}{q}}$$

($\tilde{M}_{sx}$ обозначает усреднение по мере P_{sx}).

Покажем теперь, что единственным решением уравнения (1), для которого выполнено соотношение (5) и которое является марковским процессом, есть решение, построенное в лемме 3.

Пусть существует вероятностная мера P_{sx}' на пространстве $(\Omega, \mathcal{M}^s)$, которой: 1) $P_{sx}'\{x(s)=x\}=1$ и процесс $(\xi_s(t), \mathcal{M}_t^s, P_{sx}')$, где $\xi_s(t)$ был определен в лемме 5, является квадратично интегрируемым мартингалом с характеристикой $\int_s^t b(u,x(u))\,du$; 2) процесс $(x(t), \mathcal{M}_t^s, P_{sx}')$ марковский; 3) для любой функции $f(t,x)$, удовлетворяющей условиям замечания 3, справедливо неравенство

$$M_{sx}'\int_s^t f(u,x(u))\,du \leqslant C_T\left(\int_s^t\int_{R^m}(f(u,y))^q du dy\right)^{\frac{1}{q}},$$

где M_{sx}' — символ математического ожидания по мере P_{sx}'.

Положим

$$\bar{R}_s(t)=\exp\left\{-\int_s^t (b^{-1}(u,x(u))\,a(u,x(u)), dx(u)) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_s^t (b^{-1}(u,x(u))\,a(u,x(u)), a(u,x(u)))\,du\right\}.$$

Аналогично лемме 2 можно доказать, что процесс $(\bar{R}_s(t), \mathcal{M}_t^s, P_{sx}')$ является мартингалом. Поэтому, как и выше, для каждого $s\geqslant 0$, $x\in R^m$ можно определить вероятностную меру $\bar{Q}_{sx}$ на $(\Omega, \mathcal{M}^s)$, сужения которой на σ-алгебры $\mathcal{M}_T^s$ определяются формулой

$$Q_{sx}(A)=\int_A \bar{R}_s(T)\,P_{sx}'(d\omega), \quad A\in\mathcal{M}_T^s.$$

Далее, аналогично предыдущему, используя теорему Гирсанова, можно показать, что процесс $(x(t)-x(s), \mathcal{M}_t^s, Q_{sx})$ есть квадратично интегрируемый мартингал с характеристикой $\int_s^t b(u,x(u))\,du$.

В силу условия (III) $\bar{Q}_{sx}=Q_{sx}$, при этом

$$\left.\frac{dQ_{sx}}{dP_{sx}'}\right|_{\mathcal{M}_T^s}=\bar{R}_s(T).$$

Поскольку $\bar{R}_s(T)>0$ P_{sx}'-почти наверное, то $\left.\frac{dP_{sx}'}{dQ_{sx}}\right|_{\mathcal{M}_T^s}=(\bar{R}_s(T))^{-1}$ Q_{sx}-почти наверное. Но $(\bar{R}_s(T))^{-1}=R_s(T)$. Значит, при любом $T<\infty$, $x\in$ $A\in\mathcal{M}_T^s$

$$P_{sx}'(A)=\int_A R_s(T)\,Q_{sx}(d\omega),$$

т. е. $P_{sx}=P_{sx}'$.

Итак, имеет место такая теорема единственности.

Теорема 2. *Пусть $b(t,x)$ удовлетворяет условиям (I)—(III), функция $a(t,x)$ — условию (IV). Предположим, что на пространс*

$(\Omega, \mathcal{M}^s)$ *определена вероятностная мера* P_{sx}, *для которой выполнены условия 1) — 3). Тогда мера* P'_{sx} *совпадает с мерой* P_{sx}, *построенной в лемме 3.*

2. Рассмотрим последовательность стохастических дифференциальных уравнений $dx(t) = a_n(t, x(t))\,dt + B(t, x(t))\,dw(t)$ и докажем следующее утверждение.

Теорема 3. *Пусть функции* $a_n(t, x)$ *и* $b(t, x)$ *удовлетворяют условиям (IV) и (I) — (III) соответственно. Пусть задана функция* $a(t, x)$, $t \geqslant 0$, $x \in R^m$ *со значениями в* R^m, *удовлетворяющая условию (IV) с тем же показателем* $p \geqslant 2m+2$, *что и функции* $a_n(t, x)$, $n = 1, 2, \ldots$ *Предположим, что*

$$\int_0^T \int_{R^m} |a_n(t, x) - a(t, x)|^p\,dt\,dx \underset{n\to\infty}{\to} 0, \quad T < \infty.$$

Если $P_{sx}^{(n)}$ *и* P_{sx}, $s \geqslant 0$, $x \in R^m$, $n = 1, 2, \ldots,$ — *меры, построенные указанным выше способом по функциям* $a_n(t, x)$, $b(t, x)$ *и* $a(t, x)$, $b(t, x)$ *соответственно, то при всех* $0 \leqslant s \leqslant T < \infty$, $x \in R^m$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{A \in \mathcal{M}_T^s} |P_{sx}^{(n)}(A) - P_{sx}(A)| = 0.$$

Доказательство. Поскольку для $A \in \mathcal{M}_T^s$

$$P_{sx}^{(n)}(A) - P_{sx}(A) = \int_A [R_s^{(n)}(T) - R_s(T)]\,Q_{sx}(d\omega),$$

где $R_s^{(n)}(t)$ строится по $a_n(t, x)$ и $b(t, x)$ так же, как $R_s(t)$ по $a(t, x)$ и $b(t, x)$, то теорема будет доказана, если мы покажем, что при фиксированных $0 \leqslant s \leqslant T < \infty$

$$\lim_{n\to\infty} [R_s^{(n)}(T) - R_s(T)] = 0 \text{ по вероятности } Q_{sx} \tag{6}$$

и что последовательность $R_s^{(n)}(T) - R_s(T)$ равномерно интегрируема по мере Q_{sx}.

Равномерная интегрируемость последовательности $R_s^{(n)}(T) - R_s(T)$ следует из замечания 2.

Соотношение (6) будет доказано, если будет установлено, что имеют место соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\,a_n(u, x(u)), dx(u)) = \int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\,a(u, x(u)), dx(u)),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\,a_n(u, x(u)), a_n(u, x(u)))\,du =$$

$$= \int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\,a(u, x(u)), a(u, x(u)))\,du \tag{7}$$

в смысле сходимости по вероятности Q_{sx}. Имеем

$$M_{sx}\left[\int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\,a_n(u, x(u)), dx(u)) - (b^{-1}(u, x(u))\,a(u, x(u)), dx(u))\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{C_1} M_{sx} \int_s^T |a_n(u, x(u)) - a(u, x(u))|^2 du \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_T}{C_1}\left[\int_s^T \int_{R^m} |a_n(u, y) - a(u, y)|^p\,du\,dy\right]^{\frac{2}{p}}$$

вследствие леммы 1. Первое из соотношений доказано.

Далее,

$$M_{sx}\left|\int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\, a_n(u, x(u)), a_n(u, x(u)))\,du - \right.$$

$$\left. - \int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), a(u, x(u)))\,du \right| \leqslant$$

$$\leqslant M_{sx}\left|\int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\,[a_n(u, x(u)) - a(u, x(u))], a_n(u, x(u)))\,du\right| +$$

$$+ M_{sx}\left|\int_s^T (b^{-1}(u, x(u))\, a(u, x(u)), a_n(u, x(u)) - a(u, x(u)))\,du\right| = I_1 + I_2.$$

Применяя неравенство Гельдера и лемму 1, получаем

$$I_1 \leqslant \frac{C_T^2}{C_1}\left(\int_s^T \int_{R^m} |a_n(u, y) - a(u, y)|^p du dy\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_s^T \int_{R^m} |a_n(u, y)|^p du dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

откуда следует, что $I_1 \to 0$ при $n \to \infty$. Аналогично, $\lim\limits_{n\to\infty} I_2 = 0$. Итак, (7) установлено и доказательство завершено.

1. *Гирсанов И. В.* О преобразовании одного класса случайных процессов с помощью абсолютно непрерывной замены меры.— Теория вероятностей и ее применения, 1960, 5, с. 314—330.
2. *Портенко Н. И.* Обобщенные диффузионные процессы : Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук.— Киев, 1978.—24 с.
3. *Крылов Н. В.* Управляемые процессы диффузионного типа.— М. : Наука, 1977.— 398 с.
4. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Стохастические дифференциальные уравнения и их приложения.— М. : Наука, 1982.—612 с.
5. *Гихман И. И., Скороход А. В.* Теория случайных процессов: В 3-х т.— М. : Наука, 1975.—Т. 3. 496 с.
6. *Крылов Н. В.* Некоторые оценки плотности распределения стохастического интеграла.— Изв. АН УССР, 1974, 1, с. 228—248.
7. *Гихман И. И.* О некоторых дифференциальных уравнениях со случайными функциями.— Укр. мат. журн., 1950, № 2/3, с. 45—69.
8. *Parthasarathy K. R.* Probability measures on metric spaces.— New York : Acad. press, 1967.—276 p.

Институт математики
АН УССР

Поступила в редакцию
14.05.1981 г.