УДК 517.944

Я. С. Кушицкий

Уточненные формулы ядер Пуассона эллиптической граничной задачи в полупространстве

Рассмотрим граничную задачу в полупространстве

$$\sum_{|k|=2b} a_k \frac{\partial^{2b} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \equiv L\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u = 0, \quad x_n > 0; \tag{1}$$

$$\sum_{|k|=m_j} b_{kj} \frac{\partial^{m_j} u}{\partial x_1^{k_1} \partial x_2^{k_2} \dots \partial x_n^{k_n}} \bigg|_{x_n=0} \equiv B_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) u \bigg|_{x_n=0} = \varphi_j(x'). \tag{2}$$

Здесь $j = 1, 2, \dots, b$, $|k| = k_1 + k_2 + \dots + k_n$, $x' = (x_1, \dots, x_{n-1})$, коэффициенты a_k и b_{kj} операторов постоянны. Оператор L удовлетворяет такому алгебраическому условию: уравнение $L(\xi', \tau) = 0$ имеет при действительных векторах $\xi' = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \neq 0$ ровно b корней с положительной и столько же — с отрицательной мнимой частью.

Пусть $L(\xi', \tau) = M^+(\xi', \tau) M^-(\xi', \tau)$ — факторизация полинома L, где

$$M^+(\xi', \tau) = \prod_{k=1}^{b} (\tau - \tau_k^+(\xi')) = \sum_{\rho=0}^{b} a_\rho^+(\xi') \tau^{b-\rho}$$

— полином, τ-корни которого имеют положительные мнимые части

($\operatorname{Im} \tau_k^+ (\xi') > 0$). Рассмотрим полиномы $B'_j(\xi', \tau) = \sum_{k=1}^{b} \beta_{kj}(\xi') \tau^{k-1}$, являющиеся остатками от деления τ-полиномов $B_j(\xi', \tau)$, $j = 1, \ldots, b$, на полином $M^+(\xi', \tau)$. Условие дополнительности для задачи (1), (2), означает, что

$$d(\xi') = \det \| \beta_{kj}(\xi') \| = \det \mathfrak{B}(\xi') \neq 0$$

при действительных векторах $\xi' \neq 0$. Обозначим через $\mathfrak{B}^{-1}(\xi') = \| b^{kj}(\xi') \|_{k,j=1,\ldots,b}$ матрицу, обратную к матрице $\mathfrak{B}(\xi') = \| \beta_{kj}(\xi') \|_{k,j=1,\ldots,b}$. Известно [1], что полиномы

$$M_s^+(\xi', \tau) = \sum_{q=0}^{s} a_q^+(\xi') \tau^{s-q}$$

удовлетворяют соотношениям

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+} \frac{\tau^{k-1} M_{b-s}^+(\xi', \tau)}{M^+(\xi', \tau)} d\tau = \delta_{ks},$$

где δ_{ks} — символ Кронекера. Поэтому для полиномов

$$N_j(\xi', \tau) = \sum_{k=1}^{b} b^{kj}(\xi') M_{b-k}^+(\xi', \tau)$$

при произвольном k, $1 \leqslant k \leqslant b$, имеют место тождества

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma+} \frac{\tau^{k-1} N_j(\xi', \tau)}{M^+(\xi', \tau)} d\tau \equiv b^{kj}(\xi').$$

Здесь $\gamma+$ — контур, лежащий в верхней τ-полуплоскости, охватывающий все $b\tau$-корней полинома $M+(\xi', \tau)$. Из условия дополнительности вытекает такой факт: среди элементов столбца $b^{kj}(\xi')$, $k = 1, 2, \ldots, b$, есть отличные от тождественного нуля. Иначе говоря, найдется такой номер k_j, что $b^{kj}(\xi') \equiv 0$ при $k \leqslant k_j - 1$, а $b^{k_j, j}(\xi') \equiv 0$. Очевидно, что $b^{kj}(\xi')$ — однородные функции порядков $-m_j + k - 1$. Анализ показывает, что формулы ядер Пуассона, рассмотренные в работе [1], можно улучшить, в связи с этим можно улучшить и некоторые результаты, полученные в работе [3].

Граничная задача (1), (2), определяет $\vec{m} = \{m_1, m_2, \ldots, m_b\}$ — вектор порядков граничных операторов $B_j\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)$. Поэтому целесообразно, следуя методике [2], ввести такое определение.

Определение. *Вектором уточненных порядков граничной задачи (1), (2) называется вектор* $\vec{\nu} = \{\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_b\}$ *с компонентами* $\nu_j = m_j - k_j + 1$, $j = 1, 2, \ldots, b$.

Так, например, задачу Дирихле определяет вектор $\vec{D} = \{0, 1, \ldots, b-1\}$, а вектор уточненных порядков $\vec{D}_0 = \{0, 0, \ldots, 0\}$. Ядра Пуассона задачи (1), (2), как известно [1], имеет вид:

1) при $0 \leqslant m_j < n - 1$

$$K_j(x) = \beta_j \int_{|\xi'|=1} d\omega_{\xi'} \int_{\gamma+} \frac{N_j(\xi', \tau) d\tau}{M^+(\xi', \tau)(x'\xi' + x_n \tau)^{n-1-m_j}}, \tag{3}$$

$$\beta_j = (-1)^{n-1-m_j} (n - 2 - m_j)!/(2\pi i)^n;$$

2) при $m_j \geqslant n - 1$

$$K_j(x) = \beta_j \int_{|\xi'|=1} d\omega_{\xi'} \int_{\gamma+} \frac{N_j(\xi', \tau)(x'\xi' + x_n \tau)^{m_j+1-n}}{M^+(\xi', \tau)} \ln \frac{x'\xi' + x_n \tau}{i} d\tau, \tag{4}$$

$$\beta_j = -1/(2\pi i)^n (m_j + 1 - n)!$$

Здесь $x'\xi' = \sum_{k=1}^{n-1} x_k \xi_k$, $\int\limits_{|\xi'|=1} d\omega_{\xi'}(\ldots)$ — интеграл по поверхности единичной сферы $|\xi'|=1$ в пространстве R_{n-1}. Учитывая то, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^+} \frac{\tau^{k-1} N_j(\xi', \tau)}{M^+(\xi', \tau)}\, d\tau = 0 \tag{5}$$

при всех $k \leqslant k_j - 1$, а

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma^+} \frac{\tau^{k_j-1} N_j(\xi', \tau)}{M^+(\xi', \tau)}\, d\tau \not\equiv 0, \tag{6}$$

преобразуем ядра Пуассона следующим образом. Рассмотрим для функции $f(z)$ формулу Маклорена с остаточным членом в интегральной форме

$$f(z) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} z^k + \frac{z^{N+1}}{N!}\int\limits_0^1 (1-\theta)^N f^{(N+1)}(\theta z)\, d\theta.$$

Пусть функция $f(z)$ имеет вид $1/(x'\xi' + z)^{n-1-m_j}$, где $z = x_n\tau$, $m_j < n - 1$. Запишем для нее формулу Маклорена, полагая $N = k_j - 2$, и подставим полученное разложение в правую часть равенств (3). Интегрируя почленно и принимая во внимание условия (5) и (6), получаем

$$K_j(x) = \beta_j \frac{x_n^{k_j-1}}{(k_j-2)!}\int\limits_{|\xi'|=1} d\omega_{\xi'} \int\limits_{\gamma^+} \frac{\tau^{k_j-1} N_j}{M^+}\left(\int\limits_0^1 (1-\theta)^{k_j-2} f^{(k_j-1)}(\theta x_n\tau)\, d\theta\right) d\tau. \tag{7}$$

Но так как

$$f^{(k_j-1)}(z) = \frac{(-1)^{k_j-1}(n-3-m_j+k_j)!}{(n-2-m_j)!\,(x'\xi'+z)^{n-2-m_j+k_j}}, \tag{8}$$

то с учетом (7) получаем ядра Пуассона вида

$$K_j = \frac{(1)^{n-2-m_j+k_j}(n-3-m_j+k_j)!}{(2\pi i)^n}\,\frac{x_n^{k_j-1}}{(k_j-2)!}\int\limits_{|\xi'|=1} d\omega_{\xi'}\int \frac{\tau^{k_j-1} N_j(\xi', \tau)}{M^+(\xi', \tau)} \times$$

$$\times \int\limits_0^1 (1-\theta)^{k_j-2} \frac{d\theta}{(x'\xi' + \theta\tau x_n)^{n-2-m_j+k_j}}\, d\tau. \tag{9}$$

В случае $m_j \geqslant n-1$ рассмотрим функцию

$$f(z) = (x'\xi' + z)^{m_j+1-n} \ln \frac{x'\xi' + z}{i},$$

где $z = x_n\tau$, а под логарифмом понимаем главную ветвь логарифма, однозначную в плоскости вдоль отрицательного направления действительной оси. Для этой функции запишем формулу Маклорена с $N = k_j - 2$. Непосредственно дифференцируя $k_j - 1$ раз получаем

$$f^{(k_j-1)}(\theta x_n\tau) = (m_j+1-n)\ldots[(m_j+1-n)-(k_j-2)]\,(x'\xi'+\theta x_n\tau)^{m_j+2-n-k_j} \times$$

$$\times \left[\ln\frac{x'\xi'+\theta x_n\tau}{i} + \frac{1}{m_j+1-n} + \frac{1}{m_j-n} + \ldots + \frac{1}{(m_j+1-n)-(k_j-2)}\right].$$

Учитывая то, что $\nu_j = m_j + 1 - k_j$, введем обозначения $\alpha_j = (m_j + 1 - n) -$

$-(k_j-1)$. Тогда при $\alpha_j \geqslant 0$ получаем

$$f^{(k_j-1)}(\theta x_n \tau) = \frac{(m_j+1-n)!}{\alpha_j!}(x'\xi' + \theta x_n \tau)^{\alpha_j}\left[\ln \frac{x'\xi' + \theta x_n \tau}{i} + \sum_{\nu=\alpha_j+1}^{\nu=m_j+1-n} \frac{1}{\nu}\right]. \tag{10}$$

В случае $\alpha_j < 0$ в производной (k_j-1)-го порядка не будет логарифмического члена.

$$f^{(k_j-1)}(\theta x_n \tau) = \frac{(-1)^{-\alpha_j-1}(-\alpha_j-1)!\,(m_j+1-n)!}{(x'\xi' + \theta x_n \tau)^{-\alpha_j}}. \tag{11}$$

Так как $k_j \geqslant 1$, то в случае $m_j < n-1$ всегда выполняется неравенство $\alpha_j < 0$, а в случае $m_j \geqslant n-1$ возможны два варианта: $\alpha_j < 0$ и $\alpha_j \geqslant 0$. Учитывая (8), (10) и (11), для ядер Пуассона получаем такие формулы:

1) при $\alpha_j < 0$

$$K_j = \frac{(-1)^{-\alpha_j}(-\alpha_j-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{x_n^{k_j-1}}{(k_j-2)!} \int\limits_{|\xi'|=1} d\omega_{\xi'} \int\limits_{\gamma^+} \frac{\tau^{k_j-1} N_j}{M^+} \times$$

$$\times \left(\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{k_j-2}\, d\theta}{(x'\xi' + \theta x_n \tau)^{-\alpha_j}} \right) d\tau;$$

2) при $\alpha_j \geqslant 0$

$$K_j = -\frac{1}{(2\pi i)^n \alpha_j!} \frac{x_n^{k_j-1}}{(k_j-2)!} \int\limits_{|\xi'|=1} d\omega_{\xi'} \int\limits_{\gamma^+} \frac{\tau^{k_j-1} N}{M^+} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 (1-\theta)^{k_j-2}(x'\xi' + \theta x_n \tau)^{\alpha_j}\left[\ln \frac{x'\xi' + \theta x_n \tau}{i} + \sum_{\nu=\alpha_j+1}^{\nu=m_j+1-n} \frac{1}{\nu}\right] d\theta \right\} d\tau.$$

Применяя равенство

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma^+} \frac{N_j(p,\sigma)\, e^{i\sigma_n x_n}}{M^+(p,\sigma)}\, d\sigma_n =$$

$$= \frac{(ix_n)^{k_j-1}}{(k_j-2)!} \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\sigma_n^{k_j-1} N_j(p,\sigma)}{M^+(p,\sigma)} \int_0^1 (1-\theta)^{k_j-2} e^{i\sigma_n \theta x_n}\, d\theta\, d\sigma_n$$

из работы [2] и методику, разработанную в [3], при $\alpha_j < 0$ получаем

$$\int_0^\infty G_j(t,x)\, dt = K_j(x),$$

где $G_j(t,x)$ — ядра Пуассона параболической задачи. Этот результат несколько лучше, чем в [3], так как здесь могут входить те $m_j \geqslant n-1$, для которых $\alpha_j < 0$. Ранее этот результат был доказан только для $m_j < n-1$.

1. *Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л.* Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных при общих граничных условиях.— М. : Изд-во иностр. лит., 1962.—306 с.
2. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Асимптотическое представление при $t \to \infty$ решений параболических граничных задач с постоянными коэффициентами.— Мат. исслед., 1975, **10**, вып. 2, № 36, с. 119—136.
3. *Кушицкий Я. С.* О стабилизации решений параболической граничной задачи.— Укр. мат. журн., 1968, **20**, № 6, с. 766—779.

Никопольский общетехнический факультет
Днепропетровского металлургического института

Поступила в редакцию
31.03. 1981 г.