УДК 517.928.2

Н. А. Ращепкина

Асимптотическое интегрирование краевой задачи при изменении характера спектра

В работе [1] методом регуляризации получена регуляризованная асимптотика решения сингулярно возмущенной задачи Коши для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка при $\varepsilon \to 0$, когда характер спектра изменяется в одной точке. Применим названный метод для решения краевой задачи

$$\mathcal{L}_\varepsilon y \equiv \varepsilon^2 y'' + \varepsilon a_1(x) y' + a_2(x) y = h(x); \tag{1}$$

$$y(0, \varepsilon) = y(1, \varepsilon) = 0. \tag{2}$$

Предположим, что корни характеристического уравнения $\lambda^2 + a_1(x)\lambda + a_2(x) = 0$ обладают свойством

$$\lambda_1(x) = a(x) < 0, \quad \lambda_2(x) = (1 - x) b(x), \quad b(x) > 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \tag{3}$$

Согласно теореме Шлезингера — Биркгофа фундаментальная система решений при $\varepsilon \to 0$ имеет вид

$$y_i(x, \varepsilon) = \exp\left[\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{i-1}^{x} \lambda_i(\tau)\, d\tau\right] \cdot [y_{i0}(x) + O(\varepsilon)], \quad i = 1, 2.$$

Введем дополнительные независимые переменные

$$t_1 = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^x \lambda_1(\tau)\, d\tau \equiv \varphi_1(x, \varepsilon), \quad t_2 = \frac{g(x)}{\varepsilon^\alpha} \equiv \varphi_2(x, \varepsilon)$$

и будем определять расширенную функцию $\tilde{y}(x, t, \varepsilon)$ так, чтобы

$$\tilde{y}(x, t, \varepsilon)|_{t=\varphi(x,\varepsilon)} \equiv y(x, \varepsilon), \ t = (t_1, t_2), \ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2).$$

Здесь $y(x, \varepsilon)$ — решение задачи (1), (2), $\tilde{y}(x, t, \varepsilon)$ — решение расширенной задачи

$$\mathcal{L}_\mu \tilde{y} \equiv \sum_{k=0}^{1} \mu^k \mathcal{L}_k \tilde{y} = h(x); \tag{4}$$

$$\tilde{y}(0, \varphi(0, \varepsilon), \varepsilon) = \tilde{y}(1, \varphi(1, \varepsilon), \varepsilon) = 0, \tag{5}$$

где

$$\mu = \sqrt{\varepsilon},\ \mathscr{L}_4 = \frac{\partial^2}{\partial x^2},\ \mathscr{L}_1 = a(x)\,g'(x)\left(2\,\frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} + t_2\,\frac{\partial}{\partial t_1} - \mathscr{B}\right),$$

$$\mathscr{L}_0 = a^2(x)\left(\frac{\partial^2}{\partial t_1^2} - \frac{\partial}{\partial t_1}\right).$$

Операторы $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_3$ определены ниже. Оператор $\mathscr{B} = \partial/\partial t_2 + t_2$, согласно гипотезе С. А. Ломова, описывает сингулярность в случае, когда точка спектра имеет нуль первого порядка. При этом оказывается, что

$$\alpha = \frac{1}{2},\ g(x) = \left[-2\int\limits_1^x \lambda_2(\tau)\,d\tau\right]^{\frac{1}{2}},\ g'(x) \neq 0 \qquad \forall x \in [0,\ 1].$$

Решение задачи (4), (5) будем искать в виде ряда

$$\tilde{y} = \sum_{i=0}^{\infty} \mu^{i-1} y_{i-1}(x,\ t), \tag{6}$$

коэффициенты которого являются решениями следующих задач ($\varepsilon = \mu^2$):

$$\mathscr{L}_0 y_{-1} = 0,\ y_{-1}(0,\ \varphi(0,\ \varepsilon)) = -\frac{h(0)}{a(0)\,g'(0)}\,\psi_{-1}(\varphi_2(0,\ \varepsilon)), \tag{7}$$

$$y_{-1}(1,\ \varphi(1,\ \varepsilon)) = -\frac{h(1)}{a(1)\,g'(1)}\,\psi_{-1}(0),\ \mathscr{B}\psi_{-1} = 1,\ \psi_{-1}(1) = 0;$$

$$\mathscr{L}_0 y_0 = h(x) - \mathscr{L}_1 y_1,\ y_0(0,\ \varphi(0,\ \varepsilon)) = \frac{h(0)}{\mu a(0)\,g'(0)}\,\psi_{-1}(\varphi_2(0,\ \varepsilon)),$$

$$y_0(1,\ \varphi(1,\ \varepsilon)) = \frac{h(1)}{\mu a(1)\,g'(1)}\,\psi_{-1}(0); \tag{8}$$

$$\mathscr{L}_0 y_1 = -\mathscr{L}_1 y_0 - \mathscr{L}_2 y_{-1},\quad y_1(0,\ \varphi(0,\ \varepsilon)) = y_1(1,\ \varphi(1,\ \varepsilon)) = 0; \tag{9}$$

$$\mathscr{L}_0 y_2 = -\sum_{k=1}^{3} \mathscr{L}_k y_{2-k},\ y_2(0,\ \varphi(0,\ \varepsilon)) = y_2(1,\ \varphi(1,\ \varepsilon)) = 0; \tag{10}$$

$$\mathscr{L}_0 y_i = -\sum_{k=1}^{4} \mathscr{L}_k y_{i-k},\ y_i(0,\ \varphi(0,\ \varepsilon)) = y_i(1,\ \varphi(1,\ \varepsilon)) = 0,\ i = 3,\ 4,\ \ldots. \tag{11}$$

Будем решать задачи (7)—(11) в пространстве $\mathcal{Y} = \{y\ (x,\ t)\}$, элементы которого (для удобства присваиваем им индекс i) представимы в виде

$$y_i(x,\ t) = c_i(x)\,e^{t_1} + v_i(x)\,e^{-\frac{t_2^2}{2}} + q_i(x,\ t_2),$$

где $c_i(x),\ v_i(x) \in C^\infty[0,\ 1]$, функция $q_i(x,\ t_2)$ бесконечно дифференцируема по x, а целая по t_2, причем при $t_2 \to \infty$

$$\frac{\partial^{k+l} q_i(x,\ t_2)}{\partial x^l \partial t_2^k} \sim \begin{cases} t_2^{-i-2-k}, & i = -1,\ 0,\ 1, \\ t_2^{-i-k}, & i = 2,\ 3,\ \ldots, \end{cases} \quad k,\ l = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots.$$

Чтобы обеспечить инвариантность Y относительно расширенного оператора $\mathscr{L}_\mu$, для операторов $\mathscr{L}_2$ и $\mathscr{L}_3$ имеем

$$\mathscr{L}_2 y_i = e^{t_1}\mathcal{M} c_i + e^{-\frac{t_2^2}{2}}\mathcal{N} v_i + a_1\,\frac{\partial q_i}{\partial x} + g'^2\mathscr{L} q_i,\quad \mathscr{L}_3 y_i = \mathscr{P}\,\frac{\partial q_i}{\partial t_2},$$

где $\mathcal{M} = (\lambda_1 - \lambda_2)\frac{d}{dx} + \lambda_1'$, $\mathcal{N} = (-\lambda_1 + \lambda_2)\frac{d}{dx} - (g'^2 + gg'')$, $\mathcal{L} = \frac{\partial^2}{\partial t_2^2} + t_2\frac{\partial}{\partial t_2}$, $\mathcal{P} = 2g'\frac{\partial}{\partial x} + g''$.

Теперь операторы $\mathcal{L}_h$, $k = \overline{0,4}$, обладают свойством $\mathcal{L}_h\, Y \subset Y$ (в предположении, что $a_i(x) \in C^\infty[0,1]$, $i = 1, 2$). Используя это, можно доказать однозначную разрешимость задач (7)—(11) в Y.

Обозначим частичную сумму сужения ряда (6) через

$$y_{\varepsilon n}(x, \varepsilon) = \sum_{i=0}^{2n+1} \varepsilon^{\frac{i-1}{2}} y_{i-1}(x, \varphi(x, \varepsilon)).$$

Справедлива следующая теорема об оценке остаточного члена.

Теорема. *Если $a_i(x)$, $i = 1, 2$, $h(x) \in C^\infty[0, 1]$ и выполняется условие (3), то при достаточно малых $\varepsilon > 0$ в пространстве Y единственным образом может быть построен ряд (6), сужение которого при $t = \varphi$ является асимптотическим рядом для решения задачи (1), (2), т. е. имеет место оценка*

$$\| y(x, \varepsilon) - y_{\varepsilon n}(x, \varepsilon) \|_{C[0,1]} \leqslant M\varepsilon^{n+\frac{1}{2}},$$

где M не зависит от ε, $y(x, \varepsilon)$ — решение задачи (1), (2).

Доказательство проводится с помощью оценки функции Грина.

Замечание. При $x \in (0, 1)$ имеем $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} y_{\varepsilon n} = h(x)/[(1 - x)\, a(x) \times b(x)]$, что является предельным решением исходной задачи при $\varepsilon = 0$.

1. *Ломов С. А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений.— М. : Наука, 1981.— 400 с.

Ленинградский
педагогический институт

Поступила в редакцию
02.02. 1981 г.