УДК 517.9

Чан Ким Тьи

Построение асимптотических решений для квазилинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с запаздыванием

Нелинейные дифференциальные уравнения второго порядка с запаздыванием разработаны достаточно полно и изложены во многих работах [1, 2]. Однако до настоящего времени сравнительно мало работ посвящено квазилинейным дифференциальным уравнениям третьего порядка. К исследованию этих уравнений приводят механические задачи с учетом наследственности материала, а также другие физические и биологические системы.

Исследуем двупараметрическое семейство частных решений квазилинейного дифференциального уравнения третьего порядка с запаздыванием, применяя асимптотические методы [3].

1. Автономное уравнение. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+\alpha_1\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha_2\frac{dx(t)}{dt}+\alpha_3x(t)+\beta_1\frac{d^2x(t-\Delta)}{dt^2}+\beta_2\frac{dx(t-\Delta)}{dt}+$$
$$+\beta_3x(t-\Delta)=\varepsilon f\left(x(t),\ \frac{dx(t)}{dt},\ \frac{d^2x(t)}{dt^2},\ x(t-\Delta),\right.$$
$$\left.\frac{dx(t-\Delta)}{dt},\ \frac{d^2x(t-\Delta)}{dt^2},\varepsilon\right),\tag{1}$$

где α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3, Δ — постоянные, ε — малый положительный параметр, f — аналитическая функция относительно своих аргументов.

Наряду с уравнением (1) рассмотрим порождающее уравнение

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+\alpha_1\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\alpha_2\frac{dx(t)}{dt}+\alpha_3x(t)+$$
$$+\beta_1\frac{d^2x(t-\Delta)}{dt^2}+\beta_2\frac{dx(t-\Delta)}{dt}+\beta_3x(t-\Delta)=0.\tag{2}$$

Допустим, что характеристическое уравнение

$$D(\lambda)=\lambda^3+\alpha_1\lambda^2+\alpha_2\lambda+\alpha_3+\beta_1\lambda^2e^{-\Delta\lambda}+\beta_2\lambda e^{-\Delta\lambda}+\beta_3e^{-\Delta\lambda}=0\tag{3}$$

имеет пару чисто мнимых простых корней $\lambda=\pm i\Omega$, а остальные его корни имеют достаточно большую по величине отрицательную вещественную часть. Очевидно, Ω должно удовлетворять уравнениям

$$\begin{aligned}D_1(\Omega)&=-\alpha_1\Omega^2+\alpha_3-\beta_1\Omega^2\cos\Delta\Omega+\beta_2\Omega\sin\Delta\Omega+\beta_3\cos\Delta\Omega=0,\\ D_2(\Omega)&=-\Omega^3+\alpha_2\Omega+\beta_1\Omega^2\sin\Delta\Omega+\beta_2\Omega\cos\Delta\Omega-\beta_3\sin\Delta\Omega=0.\end{aligned}\tag{4}$$

В данном случае уравнение (2) обладает семейством частных периодических решений, зависящим от двух параметров

$$x(t)=a\cos(\Omega t+\psi),\tag{5}$$

где a, ψ — постоянные.

Построим асимптотические формулы для частного решения уравнения (1) (при малых ε), близкого к решению (5) порождающего уравнения (2). Это решение будем искать в виде

$$x(t)=a\cos\varphi+\varepsilon u_1(a,\varphi)+\varepsilon^2\ldots,\tag{6}$$

где $\varphi=\Omega t+\psi$, а функции $u_1(a,\varphi)$, $u_2(a,\varphi)$, ... периодические с периодом 2π по φ. Величины a и ψ как функции времени должны быть определены из системы уравнений

$$\frac{da}{dt}=\varepsilon A_1(a)+\varepsilon^2A_2(a)+\ldots,\qquad \frac{d\psi}{dt}=\varepsilon B_1(a)+\varepsilon^2B_2(a)+\ldots.\tag{7}$$

Поставленная задача сводится к определению выражений для неизвестных функций $A_1(a)$, $A_2(a)$, ..., $B_1(a)$, $B_2(a)$, ..., $u_1(a,\varphi)$, $u_2(a,\varphi)$, ..., и интегрированию системы уравнений (7).

Используя методику, изложенную в [3], после несложных выкладок находим:

$$A_1(a)=\frac{D_1'(\Omega)f_{01s}+D_2'(\Omega)f_{01c}}{D_1'^2(\Omega)+D_2'^2(\Omega)},\qquad aB_1(a)=\frac{D_1'(\Omega)f_{01c}-D_2'(\Omega)f_{01s}}{D_1'^2(\Omega)+D_2'^2(\Omega)},\tag{8}$$

$$u_{10}(a)=\frac{f_{00}(a)}{\alpha_3+\beta_3},\qquad u_{1ns}(a)=\frac{D_1(n\Omega)f_{0ns}+D_2(n\Omega)f_{0nc}}{D_1^2(n\Omega)+D_2^2(n\Omega)},$$

$$u_{1nc}(a)=\frac{D_1(n\Omega)f_{0nc}=D_2(n\Omega)f_{0ns}}{D_1^2(n\Omega)+D_2^2(n\Omega)},\quad n\geqslant 2.$$

В силу предположений относительно корней характеристического уравнения имеем, что $D_1'^2(\Omega) + \Omega_2'^2(\Omega) \neq 0$, $D_1^2(n\Omega) + D_2^2(n\Omega) \neq 0$, $n \geqslant 2$. Таким образом, в качестве первого и улучшенного первого приближения решения уравнения (1) соответственно принимаем $x(t) = a\cos\varphi$, $x(t) = a\cos\varphi + \varepsilon u_1(a, \varphi)$, где a и φ удовлетворяют уравнениям

$$\frac{da}{dt} = \varepsilon A_1(a), \qquad \frac{d\varphi}{dt} = \Omega + \varepsilon B_1(a).$$

Функции $A_1(a)$ и $B_1(a)$ имеют вид (8), а $u_1(a, \varphi)$ определяется с учетом (8) по формуле

$$u_1(a, \varphi) = u_{10}(a) + \sum_{n=2}^{\infty} u_{1nc}(a)\cos n\varphi + u_{1ns}(a)\sin n\varphi.$$

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + \xi\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \Omega^2\frac{dx(t)}{dt} + \xi\Omega^2 x(t - \varepsilon\Delta_1) = \varepsilon\mu(1 - x^2(t))\frac{dx(t - \Delta_2)}{dt}, \tag{9}$$

где ξ, Ω, Δ_1, Δ_2 — положительные постоянные. Характеристическое уравнение (3) имеет одну пару корней вида $\pm i\Omega$. С помощью изложенной выше методики получим следующие выражения для решения уравнения (9) в улучшенном первом приближении:

$$x(t) = a\cos\varphi + \frac{\varepsilon\mu a^3}{32\Omega(9\Omega^2 + \xi^2)}[(\xi\sin\Delta_2\Omega + 3\Omega\cos\Delta_2\Omega)\cos 3\varphi + (3\Omega\sin\Delta_2\Omega - \xi\cos\Delta_2\Omega)\sin 3\varphi]. \tag{10}$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon a}{2(\xi^2 + \Omega^2)}\left[\xi^2\Omega^2\Delta_1 - \mu\xi\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)\cos\Delta_2\Omega + \mu\Omega\left(\frac{3}{4}a^2 - 1\right)\sin\Delta_2\Omega\right],$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega + \frac{\varepsilon}{2(\xi^2 + \Omega^2)}\left[-\xi\Omega^3\Delta_1 + \mu\Omega\left(\frac{a^2}{4} - 1\right)\cos\Delta_2\Omega + \mu\xi\left(\frac{3}{4}a^2 - 1\right)\sin\Delta_2\Omega\right].$$

Из последних уравнений следует, что малое запаздывание $\varepsilon\Delta_1$ вызывает неустойчивость начала координат. В отличие от уравнения второго порядка (1), здесь запаздывание $\varepsilon\Delta_1$ оказывает влияние также на частоту колебаний.

2. Неавтономное уравнение (нерезонансный случай). Исследуем дифференциальное уравнение третьего порядка с запаздыванием вида

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3} + \alpha_1\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \alpha_2\frac{dx(t)}{dt} + \alpha_3 x(t) + \beta_1\frac{d^2x(t-\Delta)}{dt} + \beta_2\frac{dx(t-\Delta)}{dt} + \beta_3 x(t-\Delta) = \varepsilon f\left(\theta, x(t), \frac{dx(t)}{dt}, \frac{d^2x(t)}{dt^2}, x(t-\Delta), \frac{dx(t-\Delta)}{dt}, \frac{d^2x(t-\Delta)}{dt^2}, \varepsilon\right), \quad \theta = \nu t, \tag{11}$$

где f — функция, периодическая по θ с периодом 2π и может быть представлена в виде

$$f = \sum_{n=-N}^{N} e^{in\theta} f_n\left(x, \frac{dx(t)}{dt}, \frac{d^2x(t)}{dt^2}, x(t-\Delta), \frac{dx(t-\Delta)}{dt}, \frac{d^2x(t-\Delta)}{dt^2}, \varepsilon\right).$$

Коэффициенты f_n — полиномы по отношению к своим аргументам.

Кроме предположений первого пункта относительно корней характеристического уравнения (3) допустим еще, что между величинами Ω и ν не существует соотношение типа $p\Omega + q\nu = 0$, где p, q — целые числа (нерезонансный случай). Влияние внешнего возмущения θ в данном случае выражается в том, что решение уравнения (15) будет содержать гармоники комбинационных частот, и поэтому его надо искать в виде

$$x(t) = a\cos\varphi + \varepsilon u_1(a, \varphi, \theta) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{12}$$

где $\varphi = \Omega t + \psi$, а функции $u_i(a, \varphi, \theta)$ периодические по обеим переменным φ и θ с периодом 2π. Величины a, ψ определяются из системы уравнений типа (7).

Аналогично предыдущему случаю после несложных выкладок согласно [1] находим

$$A_1(a) = \frac{1}{2\pi^2[D_1'^2(\Omega) + D_2'^2(\Omega)]}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \varphi, \theta)[D_1'(\Omega)\sin\varphi + $$

$$+ D_2'(\Omega)\cos\varphi]\, d\varphi d\theta, \tag{13}$$

$$aB_1(a) = \frac{1}{2\pi^2[D_1'^2(\Omega) + D_2'^2(\Omega)]}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \varphi, \theta)[D_1'(\Omega)\cos\varphi - $$

$$- D_2'(\Omega)\sin\varphi]\, d\varphi d\theta, \qquad u_{1mn}(a) = \frac{f_{0mn}(a)}{D[i(m\Omega + n\nu)]}, \tag{14}$$

для всех m и n, удовлетворяющих неравенству $(m^2 - 1)^2 + n^2 \neq 0$. Следовательно,

$$u_1(a, \varphi, \theta) = \sum_{(m^2-1)^2+n^2\neq 0} \frac{e^{i(m\varphi+n\theta)}\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \varphi, \theta) - e^{i(m\varphi+n\theta)} d\varphi d\theta}{4\pi^2 D[i(m\Omega + n\nu)]}. \tag{15}$$

Аналогичным путем нетрудно определить высшие приближения.

3. Неавтономное уравнение (резонансный случай). Предположим, что выполняется резонансное соотношение.

$$\Omega = \frac{p}{q}\nu + \varepsilon\sigma, \tag{16}$$

где p, q — некоторые взаимно простые числа, определяющие вид резонанса, $\varepsilon\sigma$ — расстройка частот.

В данном случае решение уравнения (11) будем искать в виде

$$x(t) = a\cos\Phi + \varepsilon u_1(a, \Phi, \theta) + \varepsilon^2 \ldots, \tag{17}$$

где $\Phi = \frac{p}{q}\theta + \psi$, а $u_1(a, \Phi, \theta)$, $u_2(a, \Phi, \theta)$, ... — периодические функции с периодом 2π по обеим переменным Φ и θ. Величины a и ψ определяются из системы уравнений типа (7).

Аналогично предыдущим случаям, используя [3], находим

$$u_{1mn}(a) = \frac{\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} f_0(a, \Phi, \theta)\, e^{-i(m\Phi+n\theta)} d\Phi d\theta}{4\pi^2 D[i(m\Omega + n\nu)]} \tag{18}$$

для всех m и n, удовлетворяющих условию

$$(m \pm 1)\Omega + n\nu \neq 0, \tag{19}$$

которое в рассматриваемом резонансном случае (16) эквивалентно условию

$$(m \pm 1)p + nq \neq 0 \tag{20}$$

или $m \neq rq \pm 1$, $n \neq -rp$, где r — коэффициент пропорциональности.

Соответственно имеем

$$A_1(a,\psi)=\frac{\sum\limits_r e^{irq\psi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_0(a,\Phi,\theta)\,e^{-irq\overline{\psi}}\,[D_1'(\Omega)\sin\Phi+D_2'(\Omega)\cos\Phi]\,d\Phi d\theta}{2\pi^2\,[D_1'^2(\Omega)+D_2'^2(\Omega)]},$$

$$aB_1(a,\psi)=a\sigma+\frac{\sum\limits_r e^{irq\psi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f_0(a,\Phi,\theta)\,e^{-irq\overline{\psi}}\,[D_1'(\Omega)\cos\Phi-D_2'(\Omega)\sin\Phi]\,d\Phi d\theta}{2\pi^2\,[D_1'^2(\Omega)+D_2'^2(\Omega)]}, \tag{21}$$

где $\overline{\psi}=\Phi-\dfrac{p}{q}\,\theta$.

Таким образом, построение двупараметрического решения уравнения (11) для резонансного случая в первом приближении сводится к интегрированию системы уравнений $da/dt=\varepsilon A_1(a,\psi)$, $\partial\psi/dt=\varepsilon B_1(a,\psi)$, которая гораздо проще исходного.

Стационарные решения, как обычно, определяются из системы уравнений

$$da/dt=0,\qquad d\psi/dt=0, \tag{22}$$

а их устойчивость исследуется с помощью Рауса—Гурвица.

Заметим, что приведенную в настоящей статье методику построения решения квазилинейных дифференциальных уравнений третьего порядка с запаздыванием нетрудно распространить на более общее уравнение с медленно меняющимися параметрами [4, 5], уравнение со многими внешними частотами, уравнение со случайным возбуждением и т. д.

В качестве примера рассмотрим уравнение

$$\frac{d^3x(t)}{dt^3}+\xi\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\Omega^2\frac{dx(t-\varepsilon\Delta_1)}{dt}+\xi\Omega^2x(t)=\varepsilon h\cos\theta\cdot x(t-\Delta)+\varepsilon\gamma x^3(t), \tag{23}$$

где Δ, Δ_1, ξ, Ω, h — положительные постоянные, в случае резонанса, т. е. при $\Omega=\nu/2+\varepsilon\sigma$.

В первом приближении для решения уравнения (23) имеем $x(t)=a\cos\left(\dfrac{1}{2}\,\theta+\psi\right)$, где a и ψ — решения системы уравнений

$$\frac{da}{dt}=\frac{\varepsilon a}{4\Omega(\xi^2+\Omega^2)}\Big[-\xi h\sin(2\psi-\Delta\Omega)-\Omega h\cos(2\psi-\Delta\Omega)+ +\Omega\left(2\Delta_1\Omega^4-\frac{3}{2}\,\gamma a^2\right)\Big],$$

$$a\frac{d\psi}{dt}=\frac{\varepsilon a}{4\Omega(\xi^2+\Omega^2)}\Big[\Omega h\sin(2\psi-\Delta\Omega)-\xi h\cos(2\psi-\Delta\Omega)+ +\xi\left(2\Delta_1\Omega^4-\frac{3}{2}\,\gamma a^2\right)+4\Omega\sigma(\xi^2+\Omega^2)\Big].$$

Отсюда получаем следующие стационарные решения:

$$1)\quad a=0,$$

$$2)\quad a_*^2=\frac{\xi}{\Omega}\,\eta-\Delta_1^*\pm\sqrt{h_1^2-\eta^2},\ \text{если}\ \gamma<0, \tag{24}$$

$$3)\quad a_*^2=-\frac{\xi}{\Omega}\,\eta+\Delta_1^*\pm\sqrt{h_1^2-\eta^2},\ \text{если}\ \gamma>0. \tag{25}$$

Здесь приняты обозначения: $\Delta_1^* = \frac{\varepsilon}{2}\,\Omega\Delta_1,\ h_1 = \frac{\varepsilon h}{4\Omega^3},\ \eta = \frac{\nu}{2\Omega} - 1,$

$$a_*^2 = \begin{cases} -\frac{3\varepsilon\gamma}{8\Omega^3}\,a^2, & \gamma < 0, \\ \frac{3\varepsilon\gamma}{8\Omega^3}\,a^2, & \gamma > 0. \end{cases}$$

Из выражений (24) и (25) следует, что запаздывание $\varepsilon\Delta_1$ вызывает уменьшение амплитуды колебаний, если $\gamma < 0$, и увеличение ее, если $\gamma > 0$.

1. *Митропольский Ю. А., Мартынюк Д. И.* Периодические и квазипериодические колебания систем с запаздыванием.— Киев : Вища школа, 1979.— 247 с.
2. *Рубаник В. П.* Колебания квазилинейных систем с запаздыванием.— М.: Наука, 1964.— 286 с.
3. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний.— М.: Наука, 1974.— 502 с.
4. *Чан Ким Тьи.* Асимптотический метод построения решений дифференциальных уравнений N-го порядка с медленно меняющимися параметрами (автономный случай).—Укр. мат. журн., 1981, 33, № 3, с. 427—429.
5. *Чан Ким Тьи.* Асимптотический метод построения решений дифференциальных уравнений N-го порядка с медленно меняющимися параметрами в неавтономном случае.— Укр. мат. журн., 1981, 33, № 4.

Вьетнам

Поступила в редакцию
26.06.82