Н. И. Шкиль, И. М. Конет

К вопросу о собственных значениях краевой задачи для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной дробного ранга

В работе [1] для системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной построены формальные частные решения и доказан их асимптотический характер.

В данном сообщении рассматривается краевая задача, определенная системой линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при производной вида

$$\varepsilon^{p/q} d^2x/dt^2 + A(t, \varepsilon)\, x = 0 \tag{1}$$

и граничными условиями

$$x(0, \varepsilon) = x(L, \varepsilon) = 0, \tag{2}$$

где $x(t, \varepsilon)$ — искомый n-мерный вектор, p и q — взаимно простые натуральные числа, $A(t, \varepsilon)$ — действительная квадратная матрица n-го порядка, допускающая асимптотическое разложение в ряд по степеням малого параметра $\varepsilon > 0$

$$A(t, \varepsilon) = \sum_{s=0}^{\infty} \varepsilon^s A_s(t). \tag{3}$$

Предполагается, что для всех $t \in [0, L]$ характеристическое уравнение

$$\det \| A_0(t) - \lambda(t) E \| = 0 \tag{4}$$

(E — единичная матрица) имеет простые, отличные от нуля корни

$$\lambda_i(t) \neq \lambda_j(t), \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}; \qquad \lambda_j(t) \neq 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{5}$$

Согласно [2], формальной матрицей системы (1) называется такая матрица, которая, будучи подставлена в эту систему, превращает ее в тождество в смысле равенства двух формальных матричных степенных рядов. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть матрицы $A_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots,$ неограниченно дифференцируемы по t на сегменте $[0, L]$ и в случае $p > 2q$ хотя бы один из диагональных элементов матрицы $B(t) = T^{-1}(t) A_1(t) T(t)$ ($T(t)$ — матрица преобразования подобия для $A_0(t)$) равен нулю.*

Тогда система (1) *при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $\forall t \in (0, L]$ будет иметь формальную фундаментальную матрицу-решение вида*

$$X(t, \varepsilon) = U(t, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^t \Lambda(t)\, dt\right), \quad i = \sqrt{-1}, \tag{6}$$

где $U(t, \mu)$ — квадратная матрица типа $n \times n$, допускающая разложение

$$U(t, \mu) = \sum_{s=0}^{\infty} \mu^s U_s(t), \quad \mu = \varepsilon^{1/2q}, \tag{7}$$

$$\Lambda(t) = \operatorname{diag}(\pm\sqrt{\lambda_1(t)}, \ldots, \pm\sqrt{\lambda_n(t)}). \tag{8}$$

Доказательство. Пусть матрица (6) — формальная матрица-решение системы (1). Подставляя эту матрицу и ее вторую производную в (1), получаем тождество

$$\mu^{2p}U'' + 2i\mu^p U'\Lambda + i\mu^p U\Lambda' - U\Lambda^2 + A(t, \mu^{2q})\, U = 0. \tag{9}$$

Приравнивая в тождестве (9) коэффициенты при одинаковых степенях параметра μ, приходим к бесконечной матричной алгебраической системе уравнений

$$A_0(t)\, U_0(t) - U_0(t)\, \Lambda^2(t) = 0, \tag{10}$$

$$A_0(t)\, U_s(t) - U_s(t)\, \Lambda^2(t) = F_s(t), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{11}$$

где

$$F_s(t) = -U''_{s-2p}(t) - 2iU'_{s-p}(t)\, \Lambda(t) - iU_{s-p}(t)\, \Lambda'(t) - \sum_{k=1}^{[s/2q]} A_k(t)\, U_{s-2qk}(t). \tag{12}$$

Следовательно, для того чтобы матрица (6) была формальной матрицей-решением системы (1) необходимо, чтобы коэффициенты ряда (7) и матрица (8) удовлетворяли системе уравнений (10), (11). Можно показать и обратное: если коэффициенты ряда (7) и матрица (8) удовлетворяют системе (10), (11), то матрица (6) — формальная матрица-решение системы (1). Таким образом, для доказательства теоремы нужно найти неизвестные матрицы $U_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots,$ из системы (10), (11), т. е. доказать ее разрешимость. Согласно условиям теоремы матрицу $A_0(t)$ можно представить в виде

$$A_0(t) = T(t)\, W(t)\, T^{-1}(t), \tag{13}$$

где

$$W(t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(t), \ldots, \lambda_n(t)). \tag{14}$$

Систему (10), (11) можно записать так:

$$T(t)\, W(t)\, T^{-1}(t)\, U_0(t) - U_0(t)\, \Lambda^2(t) = 0, \tag{15}$$

$$T(t)\, W(t)\, T^{-1}(t)\, U_s(t) - U_s(t)\, \Lambda^2(t)\, F_s(t), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{16}$$

Умножая уравнения (15), (16) слева на матрицу $T^{-1}(t)$ и вводя обозначения

$$R_s(t) = T^{-1}(t)\, U_s(t), \quad s = 0, 1, \ldots, \quad H_s(t) = T^{-1}(t)\, F_s(t), \quad s = 1, 2, \ldots, \tag{17}$$

систему (15), (16) перепишем в виде

$$W(t)\, R_0(t) - R_0(t)\, W(t) = 0, \tag{18}$$

$$W(t)\, R_s(t) - R_s(t)\, W(t) = H_s(t), \quad s = 1, 2, \ldots. \tag{19}$$

Из (12), (17) следует, что

$$H_s(t)=0, \quad 1 \leqslant s < m = \min(p, 2q). \tag{20}$$

Рассмотрим два случая: а) $p > 2q$; б) $p < 2q$. а). Система (18), (19) имеет вид

$$W(t) R_s(t) - R_s(t) W(t) = 0, \quad s = \overline{0, 2q-1}, \tag{21}$$

$$W(t) R_s(t) - R_s(t) W(t) = H_s(t), \quad s = 2q, \ldots . \tag{22}$$

Исследуем уравнения (21). Согласно [3]

$$R_s(t) = \operatorname{diag}(r_{11}^{(s)}(t), \ldots, r_{nn}^{(s)}(t)), \quad s = \overline{0, 2q-1}, \tag{23}$$

где $r_{jj}^{(s)}(t)$ — произвольные, пока неопределенные функции. При $s = 2q$ получаем уравнение

$$W(t) R_{2q}(t) - R_{2q}(t) W(t) = H_{2q}(t) = -T^{-1}(t) A_1(t) T(t) R_0(t). \tag{24}$$

Условие разрешимости уравнения (24), как известно [3], состоит в том, что диагональные элементы правой части должны быть нулевыми, т. е.

$$h_{kk}^{(2q)}(t) = 0, \quad k = \overline{1, n}. \tag{25}$$

Из этих соотношений находим элементы $r_{jj}^{(0)}(t)$ матрицы $R_0(t)$. Следовательно, матрица $U_0(t) = T(t) R_0(t)$ определена. Из уравнения (24) можно определить матрицу $R_{2q}(t)$, за исключением ее диагональных элементов. Имеем

$$r_{ij}^{(2q)}(t) = h_{ij}^{(2q)}(t)/[\lambda_i(t) - \lambda_j(t)], \quad i \neq j, \quad i, j = \overline{1, n}. \tag{26}$$

Элементы $r_{jj}^{(2q)}(t)$ определяются из уравнения (22) при $s = 4q$. Продолжая этот процесс, из уравнений (21), (22) определим матрицы $R_s(t)$, а значит, и матрицы $U_s(t)$, $s = 0, 1, \ldots$.

б). Имеем систему уравнений

$$W(t) R_s(t) - R_s(t) W(t) = 0, \quad s = \overline{0, p-1}, \tag{27}$$

$$W(t) R_s(t) - R_s(t) W(t) = H_s(t), \quad s = p, p+1, \ldots, \tag{28}$$

при этом

$$H_p(t) = -2i\Lambda(t) R_0'(t) - i(2T^{-1}(t) T'(t) \Lambda(t) + \Lambda'(t)) R_0(t). \tag{29}$$

Разрешимость системы (27), (28) доказывается аналогично случаю а), с той разницей, что для определения элементов $r_{jj}^{(s)}(t)$, $j = \overline{1, n}$, $s = \overline{0, p-1}$, диагональных матриц $R_s(t)$, $s = \overline{0, p-1}$, и диагональных элементов последующих матриц $R_s(t)$, $s = p, p+1, \ldots$, получим линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Очевидно, что таким образом построенная формальная матрица-решение системы (1) при достаточно малых $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и $At \in [0, L]$ фундаментальна. Теорема доказана.

Примечание. Из (8) следует, что для системы (1) можно построить две формальные фундаментальные матрицы, при этом, как легко видеть, они будут линейно независимыми, т. е. можно построить общее формальное решение системы.

Известно [4], что общее формальное решение системы (1) можно записать в виде

$$x(t, \varepsilon) = X_1(t, \varepsilon) c_1 + X_2(t, \varepsilon) c_2, \tag{30}$$

где $X_1(t, \varepsilon)$, $X_2(t, \varepsilon)$ — любые две линейно независимые формальные фундаментальные матрицы, c_1, c_2 — произвольные n-мерные векторы.

Введем в рассмотрение вектор

$$x_m(t, \varepsilon) = X_1^{(m)}(t, \varepsilon) c_1 + X_2^{(m)}(t, \varepsilon) c_2, \tag{31}$$

где

$$X_k^{(m)}(t, \varepsilon) = U_k^{(m)}(t, \mu) \exp\left(i\mu^{-p} \int_0^t \Lambda(t)\, dt\right),$$

$$U_k^{(m)}(t, \mu) = \sum_{s=0}^{m} \mu^s U_{ks}(t), \quad k = 1, 2. \tag{32}$$

Методами, изложенными в [4, 5], можно доказать, что формальное решение (30) имеет асимптотический характер в смысле Крылова—Боголюбова—Митропольского.

Теорема 2. *Если выполняются условия теоремы* 1, $\mathrm{Re}(i\sqrt{\lambda_j(t)}) \leqslant \leqslant 0$ *и при* $t=0$

$$x(t, \varepsilon) = x_m(t, \varepsilon); \qquad dx(t, \varepsilon)/dt = dx_m(t, \varepsilon)/dt, \tag{33}$$

то для любого $L > 0$ *существует постоянная* $a > 0$, *не зависящая от* ε, *что* $\forall t \in [0, L]$, $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ *будут выполняться неравенства*

$$\begin{gathered} \| x(t, \varepsilon) - x_m(t, \varepsilon) \| \leqslant a\varepsilon^{(m+1-2p)/2q}, \\ \| dx(t, \varepsilon)/dt - dx_m(t, \varepsilon)/dt \| \leqslant a\varepsilon^{(m+1-2p)/2q}. \end{gathered} \tag{34}$$

Возьмем в общем решении (30)

$$\begin{gathered} X_1(t, \varepsilon) = U_1(t, \mu) \cos\left(\mu^{-p}\int_0^t \Lambda(t)\,dt\right), \\ X_2(t, \varepsilon) = U_2(t, \mu) \sin\left(\mu^{-p}\int_0^t \Lambda(t)\,dt\right). \end{gathered} \tag{35}$$

Так как $X_1(0, \varepsilon) \neq 0$, $X_2(0, \varepsilon) = 0$, то, подставив (30) в первое граничное условие, получим, что

$$x(t, \varepsilon) = X_2(t, \varepsilon)\, c_2. \tag{36}$$

Из второго граничного условия находим

$$X_2(L, \varepsilon) = 0. \tag{37}$$

Отсюда, следует, что для существования нетривиального решения задачи (1), (2) необходимо и достаточно, чтобы

$$\det \| X_2(L, \varepsilon) \| = 0. \tag{38}$$

Из (35), (38) вытекает, что

$$\sin\left(\mu^{-p}\int_0^l \sqrt{\lambda_j(t)}\,dt\right) = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{39}$$

Отсюда находим, учитывая, что $\varepsilon = \mu^{2q}$, собственные значения краевой задачи

$$\varepsilon_j^{(\nu)} = \left[\left(\int_0^L \sqrt{\lambda_j(t)}\,dt\right)/\pi\nu\right]^{2q/p}, \quad j = \overline{1, n}, \quad \nu = 1, 2, \ldots. \tag{40}$$

1. *Шкиль Н. И., Мейлиев Т. К.* Об асимптотическом представлении решений системы линейных дифференциальных уравнений второго порядка с малым параметром при старшей производной.— В кн.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Киев : Наук. думка, 1979, с. 262—269.
2. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений.— М.: Изд-во иностр. лит., 1958.— 464 с.
3. *Сотниченко Н. А., Фещенко С. Ф.* Асимптотическое интегрирование дифференциальных уравнений: Препринт 80.3.— Киев: Институт математики АН УССР, 1980.— 48 с.
4. *Фещенко С. Ф., Шкиль Н. И., Николенко Л. Д.* Асимптотические методы в теории линейных дифференциальных уравнений.— Киев : Наук. думка, 1966.— 252 с.
5. *Шкіль М. І.* Асимптотичні методи в диференціальних рівняннях.— Київ: Вища школа, 1971.— 228 с.

Киевский
педагогический институт

Поступила в редакцию
15.02.1982 г.