УДК 517.956.3

А. Н. Витюк

О разрешимости одного класса краевых задач для систем гиперболических дифференциальных уравнений

Рассмотрим краевую задачу:

$$u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y, u_{xy}),\ u = (u_1, \ldots, u_n), \tag{1}$$

$$\alpha u(x, 0) + \beta u(x, b) = v(x),\ x \in I = [0, a], \tag{2}$$

$$u(0, y) = w(y),\ y \in J = [0, b],\ \alpha w(0) + \beta w(b) = v(0), \tag{3}$$

где α, β — квадратные матрицы с постоянными коэффициентами размерности n, которая является обобщением характеристической задачи [1] для уравнения (1).

В работе [2] получены достаточные условия разрешимости задачи (1)—(3), когда f не зависит от u_{xy}, $\alpha = E$ (E — единичная матрица) и в матрице β элементы $\beta_{i,i-1} = -\lambda_i$, $i = \overline{2, n}$, а все остальные равны нулю. Здесь же показано, как и в каком случае к такой задаче может быть сведена характеристическая задача для уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = F\left(x, y, u, u_r, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u_r}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u_r}{\partial y}\right), \tag{4}$$

где $u_r(x, y)$ равны нулю, если $y < r$ и равно $u(x, y - r)$, если $y \geqslant r$.

Ясно, что к задаче (1)—(3) может быть сведена характеристическая задача для уравнения (4), когда F зависит хотя бы от одной из производных $\partial^2 u/\partial x \partial y$, $\partial^2 u_r/\partial x \partial y$.

В настоящей работе получены достаточные условия существования и единственности решения задачи (1)—(3).

1. Предварительно рассмотрим краевую задачу

$$\dot{x} = f(t, x, \dot{x}),\quad x = (x_1, \ldots, x_n), \tag{5}$$

$$\alpha x(0) + \beta x(b) = d. \tag{6}$$

Теорема 1. *Пусть выполняются следующие условия:* а) $f_i : [0, b] \times R^{2n} \to R$ *непрерывна и* $\det(\alpha + \beta) \neq 0$;

б) *существует непрерывная функция* $\omega(t, z, v) : [0, b] \times R_+^2 \to R_+$, *неубывающая по* z *и* v, *такая, что* $\omega(t, 0, 0) = 0$ и $\| f(t, z, v) - f(t, u, w) \| \leqslant \omega(t, \| z - u \|, \| v - w \|)$;

в) *для* $t \in I$ *существует непрерывное и неотрицательное решение* $v(t)$ *неравенства* $\omega\left(t, \int_0^t g(\tau)\, d\tau + \| Q \| \int_0^b g(t)\, dt,\ g(t)\right) + h(t) \leqslant g(t)$, *где* $h(t) = \max_{[0,b]} \| f(t, 0, 0) \|$, $Q(\alpha + \beta)^{-1}\beta$;

г) *в классе функций* $g(t) \leqslant v(t)$ *функция* $g(t) \equiv 0$ — *единственное решение уравнения* $g(t) = \omega\left(t, \int_0^t g(\tau)\, d\tau + \| Q \| \int_0^b g(t)\, dt,\ g(t)\right)$.

Тогда существует единственное решение задачи (5), (6).

Доказательство этой теоремы опирается на некоторые результаты работы [3].

Замечание. Если $\omega(t, z, v) = Kz + Lv$, $L < 1$, то условия в), г) теоремы 1 выполняются, если

$$Kb(1 + \|Q\|) < 1 - L. \tag{7}$$

2. Пусть $v(x) = w(y) = 0$, $x \in I$, $y \in J$. В противном случае замена $u = z + \lambda$, $\lambda = w(y) + (Q - E)w(0) - Qw(b) + (\alpha + \beta)^{-1} v(x)$ приводит к краевой задаче (1)—(3) для функции z, но с нулевыми краевыми условиями.

Теорема 2. *Пусть* $f(x, y, u, p, q, s): D \times R^{4n} \to R^n$, $D = I \times J$, *ограничена, удовлетворяет условию Липшица по всем переменным с постоянными* K_x, K_y, K_u, K_p, K_q, L, *причем* $L < 1$ *и* $K_p(1 + \|Q\|) < 1 - L$. *Тогда существугт единственное решение задачи* (1)—(3).

Доказательство. Обозначим $x_i = ih$, $h = a/m$, $u^i(y) = u(x_i, y)$, $i = \overline{0, m}$. Положим $u^{i+1}(y) = u^i(y) + hw^i(y)$, где $w^i(y)$ есть решение краевой задачи

$$\dot{w}^i(y) = f_i[w] \equiv f_i(x_i, y, u^i(y), w^i(y), \dot{u}^i(y), \dot{w}^i(y)), \quad \alpha w^i(0) + \beta w^i(b) = 0. \tag{8}$$

Решение задачи (8) в силу теоремы 1 и замечания 1 существует и единственно.

Учитывая, что $w^i(y) = \int_0^y f_i[w]\,dy + Q\int_0^b f_i[w]\,dy$, нетрудно доказать, что

$$\|r^{i+1}(y) - r^i(y)\| = O(h), \quad \|r^i(y + \Delta y) - r^i(y)\| = O(\Delta y), \quad r = u,\ \dot{u},\ w,\ \dot{w},$$
$$i = \overline{0,\ m-1}. \tag{9}$$

Пусть для $(x, y) \in \{x_i \leqslant x < x_{i+1},\ y \in J\}$, $i = \overline{0, m-1}$, $u^h(x, y) = u^i(y) + (x - x_i)w^i(y)$ и пусть $u^h(a, y) = u^m(y)$, $u^h_x(a, y) = w^{m-1}(y)$, $u^h(a, y) = \dot{u}^m(y)$, $u^h_{xy}(a, y) = \dot{w}^{m-1}(y)$.

Вектор-функция u^h удовлетворяет краевым условиям (2), (3). Используя (9), можно доказать, что последовательности $\{u^h\}$, $\{u^h_x\}$, $\{u^h_y\}$, $\{u^h_{xy}\}$ равномерно ограничены и равностепенно сглаживающие, а следовательно [4], равномерно в D сходятся при $h \to 0$ соответственно к непрерывным функциям v, v_1, v_2, v_3.

Так как $\int_0^y u^h_y dy = u^h(x, y) - u^h(x, 0)$, то отсюда и теоремы Лебега [5] имеем $\int_0^y v_2 dy = v(x, y) - v(x, 0)$, а значит, $v_2 = v_y$. Аналогично доказываем, что $v_1 = v_x$, $v_3 = v_{xy}$.

Докажем, что v является решением системы (1). Для каждого $x = x_i$, $i = \overline{0, m-1}$, вектор-функция $u^h(x, y)$ удовлетворяет уравнению (1), что следует из определения u^h и (8). Пусть $\tilde{x} = x_h$, и если $h \to 0$ путем половинения, то v будет удовлетворять уравнению (1) на линии $x = \tilde{x}$. Аналогично доказываем, что v удовлетворяет уравнению (1) в $S \times J$, где S — множество всюду плотное в I, а т. к. v, v_x, v_y, v_{xy} непрерывны в D, то v будет удовлетворять уравнению (1) всюду в D.

Единственность. Предполагая, что существует другое решение γ задачи (1) — (3), можно доказать, что $\|\gamma - u^h\| + \|\gamma_x - u^h_x\| + \|\gamma_y - u^h_y\| \to 0$ равномерно в D при $h \to 0$.

Замечание 2. Можно привести пример краевой задачи (1)—(3) (когда $L = 0$), для которой достаточное условие разрешимости, полученное в [2], не выполняется, но краевая задача однозначно разрешима в силу теоремы 2.

1. *Porath G.* Über die Differentialgleichung $z_{xy} = \Phi(x, y, z, z_{xy})$.—Math. Nachr., 1967, 33, N 1/2, S. 73—89.
2. *Цуцунава М. Т.* Об одной краевой задаче для систем гиперболических уравнений.— В сб.: Краевые задачи. Пермь, 1979, с. 58—60.
3. *Ważewski T.* Sur un procédè de prouver la convergence des approximations successives sans utilisation des séries de comparaison.— Bull. Acad. Sci. Ser. Sci. math., astr. et phys 1960, 8, N 1, p. 45—52.
4. *Будак Б. М., Горбунов А. Д.* О разностном методе решения нелинейной задачи Гурса.— Докл. АН СССР, 1957, 117, № 4, с. 559—562.
5. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Высш. школа, 1963.— 363 с.

Одесский госуниверситет
им. И. И. Мечникова

Поступила в редакцию
20.11.81