УДК 517.925.3

О. С. Черникова

# О диссипативности систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

В настоящей работе получены некоторые достаточные условия диссипативности систем дифференциальных уравнений с импульсным воздействием в фиксированные моменты времени, а также условия равномерной ограниченности решений таких систем. Для обыкновенных дифференциальных уравнений подобные вопросы изучались многими авторами [1—3]. Результаты предлагаемой статьи распространяют ряд результатов указанных работ на случай импульсных систем.

1. Пусть задана система дифференциальных уравнений с импульсным воздействием вида

$$dx/dt = f(t, x), \qquad t \neq t_i, \quad \Delta x|_{t=t_i} = I^i(x), \tag{1}$$

где $t \in R$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $i \in Z$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $I^i = (I_1^i, \ldots, I_n^i)$, $f(t, x) \in C_{tx}^{(0,1)}(R \times R^n)$, $I^i(x) \in C^1(R^n)$. При этом предполагается, что моменты времени импульсных воздействий $t_i$ удовлетворяют условию $0 < \theta_1 \leqslant t_{i+1} - t_i \leqslant \theta_2$. Для системы (1) справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в системе* (1) *функции* $f(t, x)$ *и* $I^i(x)$ *таковы, что диагональные элементы матрицы* $f'_x(t, x)$ *не превосходят некоторого числа* $m$, *а модули диагональных элементов матрицы* $E + I^{i'}(x)$ *положительного числа* $r$. *Кроме того, предположим, что* $|f_k(t, x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots, x_n)| \leqslant M$, $|I_k^i(x_1, \ldots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \ldots x_n)| \leqslant M$, $k = 1, 2, \ldots, n$. *Тогда если*

$$m + \theta^{-1} \ln r < 0, \tag{2}$$

*где* $\theta = \begin{cases} \theta_1, & \text{если } r \geqslant 1 \\ \theta_2, & \text{если } 0 < r < 1 \end{cases}$, *то система* (1) диссипативна.

Доказательство. Выберем число $\varepsilon > 0$ таким, что $r + \varepsilon < 1$, если $r < 1$, и $m + \varepsilon + \theta^{-1} \ln(r + \varepsilon) < 0$. При $\|x\| \geqslant nM\varepsilon^{-1}$ ввиду условий теоремы для решения $x(t)$ системы (1) справедливы соотношения

$$d(\|x\|^2)/dt \leqslant 2(m + \varepsilon)\|x\|^2, \quad t \neq t_i, \quad \|x(t_i + 0)\|^2 \leqslant (r + \varepsilon)^2 \|x(t_i)\|^2. \tag{3}$$

Действительно, в силу предположений теоремы о функциях $f(t, x)$ и $I^i(x)$ имеем

$$\frac{d(\|x\|^2)}{dt} = 2\sum_{k=1}^{n} f_k x_k = 2\sum_{k=1}^{n} \left[\int_0^{x_k} \frac{\partial f_k}{\partial x_k} dx_k + f_k(t, x_1, \ldots, x_{k-1}, 0,\right.$$

$$x_{k+1}, \dots, x_n)\Big] x_k \leqslant 2 \sum_{k=1}^{n} (m x_k^2 + M |x_k|) = 2m \|x\|^2 + 2M \sum_{k=1}^{n} |x_k| \leqslant$$

$$\leqslant 2m \|x\|^2 + 2Mn \|x\|, \ t \neq t_i, \ \|x(t_i + 0)\|^2 = \|x(t_i) + I^i(x(t_i))\|^2 =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| \int_0^{x_k} \left(1 + \frac{\partial I_k^i}{\partial x_k}\right) dx_k + I_k^i (x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots, x_n) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n} (r |x_k| + M)^2 \leqslant r^2 \|x\|^2 + 2rMn \|x\| + nM^2.$$

Из этих неравенств следуют соотношения (3). Заметим, что при $\|x(t_i)\| \leqslant \leqslant nM\varepsilon^{-1}$ выполняются неравенства

$$\|x(t_i + 0)\|^2 \leqslant nM^2 \left(\frac{r^2 n}{\varepsilon^2} + 2\frac{rn}{\varepsilon} + 1\right). \tag{4}$$

Из (3) следует неравенство

$$\|x(t)\| \leqslant K \|x^0\| \exp[(m + \varepsilon + \theta^{-1} \ln (r + \varepsilon)) (t - t^0)] \tag{5}$$

где $K \geqslant 1$, $x^0 = x(t^0)$, выполняющееся при $\|x\| \geqslant nM\varepsilon^{-1}$. Нетрудно убедиться в том, что из (2), (4) и (5) следует диссипативность рассматриваемой системы.

Аналогично можно доказать следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть в системе (1) функция $f(t, x)$ такова, что диагональные элементы матрицы $f'_x(t, x)$ не превосходят некоторого числа $m$; для каждого $i \in Z$ при всех $x \in R^n$ наибольшее из собственных чисел $\Lambda_i(x)$ матрицы $\{[E + I^{i'}(x)]^T [E + I^{i'}(x)]\}$ удовлетворяет неравенству $\Lambda_i(x) \leqslant \alpha^2$, где $\alpha > 0$, и, кроме того, $\|I^i(0)\| \leqslant M$, $i \in Z$, $|f_k(t, x_1, \dots, x_{k-1}, 0, x_{k+1}, \dots$ $\dots, x_n)| \leqslant M$, $k = 1, 2, \dots, n$.*

Тогда если

$$m + \theta^{-1} \ln \alpha < 0,$$

где $\theta = \begin{cases} \theta_1, & \text{если } \alpha \geqslant 1 \\ \theta_2, & \text{если } \alpha < 1 \end{cases}$, то система (1) диссипативна.

2. Получим далее условие диссипативности импульсной системы вида

$$\frac{dx}{dt} = A(t) x + f(t, x), \ t \neq t_i, \ \Delta x|_{t=t_i} = B_i x + I_i(x); \tag{6}$$

где $t \in R$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, $i \in Z$; $A(t)$, $B_i$ — квадратные матрицы порядка $n$, $A(t)$ — непрерывна, $E + B_i$ — невырожденные матрицы, $f(t, x)$, $I_i(x)$ — $n$-мерные вектор-функции, непрерывные по своим переменным. Относительно моментов времени действия импульсного возмущения предполагается, что $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$, и что существует конечный предел (равномерно относительно $t \in R$)

$$\lim_{\tau \to \infty} \frac{i(t, t + \tau)}{\tau} = p, \tag{7}$$

где $i(t, t + \tau)$ — число точек последовательности $\{t_i\}$, принадлежащих множеству $[t, t + \tau)$.

Относительно функций $f(t, x)$ и $I_i(x)$ предположим, что при $\|x\| \geqslant \rho$, $t \in R$, $i \in Z$ они удовлетворяют условию

$$\|f(t, x)\| + \|I_i(x)\| \leqslant l \|x\|, \tag{8}$$

и $\|I_i(x)\| \leqslant g(x)$ при $i \in Z$, $\|x\| \leqslant \rho$, где $g(x)$ — непрерывная функция.

Теорема 3. *Пусть наибольшее из собственных чисел $\Lambda(t)$ матрицы $[A(t) + A^T(t)]/2$ удовлетворяет неравенству $\Lambda(t) \leqslant \gamma$ $(t \in R)$; для $i \in Z$*

*наибольшие из собственных чисел $\Lambda_i$ матриц $[(E+B_i)^T(E+B_i)]$ таковы, что $\Lambda_i \leqslant \alpha^2$, где $\alpha > 0$, Тогда если $\gamma + p\ln\alpha < 0$, и $l$ достаточно мало, то система* (6) *диссипативна*

Доказательство. Пусть $U(t,\tau)$ — матрицант системы уравнений

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \ t \neq t_i, \ \Delta x|_{t=t_i} = B_i x.$$

В силу условий теоремы существуют такие числа $K > 0$, $0 < \mu < |\gamma + p\ln\alpha|$, что для матрицанта $U(t,\tau)$ при $t \geqslant \tau$ справедлива оценка

$$\|U(t,\tau)y\| \leqslant K\|y\|\exp[-\mu(t-\tau)], \qquad y \in R^n$$

(см. [4]).

Поскольку для любого решения $x(t, t^0, x^0)$ системы уравнений (6) при $t \geqslant t^0$ имеет место представление

$$x(t) = U(t,t^0)x^0 + \int_{t^0}^{t} U(t,\tau)f(\tau, x(\tau))\,d\tau + \sum_{t^0<t_i<t} U(t,t_i)I_i(x(t_i)),$$

то ввиду (8) при $\|x\| \geqslant \rho$

$$\|x(t)\| \leqslant KK_1\|x^0\|\exp\{-[\mu - Kl - p\ln(1+Kl) - \varepsilon](t-t^0)\}, \tag{9}$$

где $\varepsilon > 0$ — произвольное малое число, $K_1 = K_1(\varepsilon)$. Из (9) следует, что любое решение системы (6) попадает в область $\|x\| \leqslant \rho$. Решения системы (6), кроме того, равномерно ограничены, в чем нетрудно убедиться, учитывая свойства функций $I_i(x)$. Из равномерной ограниченности решений и того, что любое решение попадает в область $\|x\| \leqslant \rho$, следует доказываемое утверждение о диссипативности системы (6).

3. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений с импульсным воздействием

$$\frac{dx}{dt} = f(t,x), \ t \neq t_i, \ \Delta x|_{t=t_i} = I_i(x), \tag{10}$$

где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $f = (f_1, \ldots, f_n)$, $I_i = (I_{i_1}, \ldots, I_{i_n})$, $i = 1, 2, \ldots$, $t \geqslant 0$. Предположим, что $f(t,x) \in C([0,\infty) \times R^n)$, $I_i(x) \in C(R^n)$, $\|I_i(x)\| \leqslant g(x) \in C(R^n)$, и что обеспечено свойство единственности решений. Относительно моментов времени импульсных воздействий $t_i$ предполагаем, что $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$, $t_i > t_{i-1}$.

Теорема 4. *Если для системы* (10) *существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t,x)$, определенная при $\|x\| \geqslant \rho$, $t \geqslant 0$, обладающая свойствами* а) $a(\|x\|) \leqslant V(t,x) \leqslant b(\|x\|)$, где $a(r)$, $b(r)$ $(r \geqslant 0)$ — непрерывные возрастающие функции, $a(r) \to \infty$ при $r \to \infty$; в) $\partial V/\partial t + \langle \operatorname{grad} V, f\rangle \leqslant 0$: с) $V(t_i, x + I_i(x)) \leqslant V(t_i, x)$, $i = 1, 2, \ldots$, то решения системы (10) равномерно ограничены.

Доказательство. Очевидно можно предполагать, что $V(t,x)$ положительна при $\|x\| \geqslant \rho$. Пусть $x(t) = x(t, t^0, x^0)$ — некоторое решение системы (10), $\|x^0\| < \alpha$. Промежуток его существования $[t^0, T)$ можно представить в виде объединения двух множеств: $T_1$ — совокупности всех $t \in [t^0, T]$, для которых решение принадлежит области $\|x\| \leqslant \rho$, $T_2$ — совокупности всех $t \in [t^0, T)$, для которых решение принадлежит области $\|x\| > \rho$. Если множество $T_2$ пусто, то утверждение теоремы верно. Если пусто $T_1$, то множество решений $x(t)$ равномерно ограничено. Действительно, рассмотрим функцию $v(t) = V(t, x(t))$. В силу в) и с) для нее выполняются неравенства $v'(t) \leqslant 0$, $t \neq t_i$, $v(t_i + 0) \leqslant v(t_i)$, т. е. $v(t)$ — невозрастающая функция. Ввиду условия а) $a(\|x(t)\|) \leqslant v(t) \leqslant b(\|x^0\|) < b(\alpha)$. Из этих неравенств, очевидно, следует равномерная ограниченность рассматриваемого множества решений.

Предположим, что оба множества $T_1$ и $T_2$ не пусты. Учитывая свойство функций $I_i(x)$, и в этом случае можем убедиться, что норма решения $x = x(t, t^0, x^0)$ ограничена числом $\beta = \max\{a^{-1}(b(\alpha)),\ a^{-1}(b(\rho + \max_{\|x\|\leqslant\rho} g(x)))\}$ при $t \geqslant t^0$. Теорема доказана.

Т е о р е м а 5. Если для системы (10) существует непрерывно дифференцируемая функция $V(t, x)$, определенная при $\| x \| \geqslant \rho$, $t \geqslant 0$, удовлетворяющая условиям а) и с) предыдущей теоремы и условию

$$\partial V/\partial t + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant h(t)\, \varphi(V(t, x)),$$

где $h(t) \geqslant 0$ — непрерывная функция при $t \geqslant 0$, причем $\int\limits_0^\infty h(t)\, dt < \infty$

$\varphi(s) > 0$ — непрерывная неубывающая функция при $s \geqslant r$, и $\int\limits_r^\infty \frac{ds}{\varphi(s)} = \infty$, то решения системы (10) равномерно ограничены.

Теорема 5 является следствием теоремы 4. Для доказательства теоремы 5 достаточно рассмотреть функцию $V_1(t, x) = -\int\limits_0^t h(\tau)\, d\tau + \int\limits_r^{V(t,x)} \frac{ds}{\varphi(s)}$. Легко убедиться в том, что для функции $V_1(t, x)$ выполняются условия а), в), с) теоремы 4.

Т е о р е м а 6. *Если для системы* (10) *существует непрерывно дифференцируемая функция* $v(t, x)$, *определенная при* $\| x \| \geqslant \rho$, $t \geqslant 0$, *и удовлетворяющая условию* а) *теоремы* 4, *а также условиям*

$$\partial V/\partial t + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant 0, \ V(t_i, x + I_i(x)) - V(t_i, x) \leqslant -c(\| x \|) \tag{11}$$

*или условиям*

$$\partial V/\partial t + \langle \operatorname{grad} V, f \rangle \leqslant -c(\| x \|), \ V(t_i, x + I_i(x)) - V(t_i, x) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \dots, \tag{12}$$

*где* $c(s)$ — *непрерывная положительная функция, то система* (10) *диссипативна.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Решения системы (10) равномерно ограничены, так как для нее выполняются условия теоремы 4. Для доказательства диссипативности рассматриваемой системы достаточно показать, что любое ее решение попадает в область $\| x \| \leqslant \rho$. Предположим противное: некоторое решение системы (10) $x(t) = x(t, t^0, x^0)$ не попадает в область $\| x \| \leqslant \rho$, т. е. $\rho < \| x(t) \| < \beta$ при $t \geqslant t^0 \geqslant 0$. Предположим, что $t^0 \in (t_p, t_{p+1}]$. Обозначим через $\gamma$ величину $\inf\limits_{\rho \leqslant s \leqslant \beta} c(s)$. Если выполнены условия (11) доказываемой теоремы, то

$$v(t^0) \geqslant v(t_{p+1}), \ v(t_i + 0) \geqslant v(t_{i+1}), \ v(t_i + 0) - v(t_i) \leqslant -\gamma, \quad i = p+1, \ p+2, \dots,$$

и при $k \geqslant p + 2$

$$v(t_k + 0) \leqslant v(t_k + 0) + v(t^0) - v(t_{p+1}) + \sum_{i=p+1}^{k-1} [v(t_i + 0) - v(t_{i+1})] = v(t^0) + \sum_{i=p+1}^{k} [v(t_i + 0) - v(t_i)].$$

Отсюда следует, что

$$v(t_k + 0) \leqslant v(t^0) - \gamma(k - p). \tag{13}$$

Если выполнены условия (12), то $v(t_{p+1}) - v(t^0) \leqslant -\gamma(t_{p+1} - t^0)$, $v(t_{i+1}) - v(t_i + 0) \leqslant -\gamma(t_{i+1} - t_i)$, $v(t_i) - v(t_i + 0) \geqslant 0$, $i = p+1, p+2, \dots$, и при $k \geqslant p + 2$

$$v(t_k) \leqslant v(t_k) + \sum_{i=p+1}^{k-1} [v(t_i) - v(t_i + 0)] \leqslant v(t_{p+1}) + \sum_{i=p+1}^{k-1} [v(t_{i+1}) - v(t_i + 0)].$$

Отсюда следует, что

$$v(t_k) \leqslant v(t^0) - \gamma(t_k - t^0). \tag{14}$$

Из (13) и (14) вытекает, что решение $x(t, t^0, x^0)$ попадает в область $\|x\| \leqslant \rho$, так как в противном случае при достаточно больших $k$ правые части (13) и (14) стали бы отрицательными. Диссипативность системы (10) доказана.

Отметим, что в теоремах 4—6 относительно моментов времени $t_i$ импульсных воздействий мы предполагаем лишь $t_i > t_{i-1}$, $t_i \to \infty$ при $i \to \infty$ (в отличие от теорем 1—3).

Если предполагать, что система (10) имеет тривиальное решение, и в теоремах 4 и 6 областью определения функции $V(t, x)$ считать $\|x\| \leqslant \rho$, $t \geqslant 0$, то при остальных условиях этих теорем тривиальное решение системы (10) будет устойчивым (теорема 4) и асимптотически устойчивым (теорема 6) [5].


1. *Плисс В. А.* Нелокальные проблемы теории колебаний.—М. : Наука, 1964.— 368 с.
2. *Йосидзава Т.* Функция Ляпунова и ограниченность решений.— Математика. Сб. переводов, 1965, 9, № 5, с. 95—127.
3. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М. : Наука, 1967.— 472 с.
4. *Самойленко А. М.*, *Перестюк Н. А.* Об устойчивости решений систем с импульсным воздействием.— Дифференц. уравнения, 1981, 17, № 11, с. 1995—2001.
5. *Гургула С. И.*, *Перестюк Н. А.* Об устойчивости положения равновесия импульсных систем.— Мат. физика. Респ. межвед. сб., 1982, вып. 31, с. 9—14.



Киевский госуниверситет
им. Т. Г. Шевченко



Поступила в редакцию
24.01.83