УДК 517.91

В. А. Галазюк, А. Н. Горечко

Общее решение бесконечной треугольной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

Рассматривается система следующего вида:

$$P(t, d/dt)\,u_n(t) = \sum_{i=0}^{n-1} P_i(t, d/dt)\,u_{n-1-i}(t), \quad n = \overline{0, \infty}, \tag{1}$$

где

$$P(t, d/dt) = p_0(t)\,d^m/dt^m + \ldots + p_m(t); \qquad p_0(t) \neq 0; \tag{2}$$

$$P_i(t, d/dt) = q_{i0}(t)\,d^{m(i)}dt/^{m(i)} + \ldots + q_{im(i)}, \quad m(i) \leqslant m. \tag{3}$$

Предположим, что $p_i(t)$ и $q_{ij}(t)$ — непрерывные функции. Сумму $\sum\limits_{i=0}^{n-1}$ в правой части (1) будем считать равной нулю при $n = 0$.

Системы вида (1) возникают, например, при решении дифференциальных уравнений методом малого параметра [1], а также при решении задач о распространении и рассеянии волн методами, изложенными в работах [2, 3]. В настоящем сообщении при нахождении общего решения системы (1) проводится полная аналогия с обыкновенными дифференциальными уравнениями порядка m.

Большими буквами латинского алфавита обозначим бесконечномерные векторы, а их компоненты — соответствующими малыми буквами, например $A = (a_0, a_1, \ldots)$, $U(t) = (u_0(t), u_1(t), \ldots)$. Свертку двух векторов будем понимать в смысле свертки последовательностей:

$$A * B = C, \qquad c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i b_{n-i}, \quad n = \overline{0, \infty}.$$

Рассмотрим задачу Коши для системы (1), т. е. найдем решение $U(t)$ удовлетворяющее начальным условиям

$$U(t_0) = U_1; \qquad U'(t_0) = U_2; \ \dots; \qquad U^{(m-1)}(t_0) = U_m, \tag{4}$$

где $U^{(k)}(t_0) = (u_0^{(k)}(t_0),\ u_1^{(k)}(t_0), \dots)$.

Так как бесконечную систему уравнений (1) можно решать последовательно, то, очевидно, теорема существования и единственности для задачи (1), (4) справедлива при тех же предположениях, что и для обыкновенного дифференциального уравнения с оператором (2) (например [4], при условии непрерывности функций $p_i(t)$, $q_{ij}(t)$ в операторах (2), (3)).

Определение 1. *Линейной комбинацией системы вектор-функций $U_k(t)$, $k = 1, l$, назовем вектор-функцию*

$$V(t) = \sum_{k=1}^{l} C_k * U_k(t), \tag{5}$$

где C_k, $k = \overline{1, l}$,— произвольные векторы.

Используя линейность операторов (2), (3), а также свойства коммутативности и ассоциативности свертки векторов, непосредственной подстановкой легко убедиться, что любая линейная комбинация частных решений системы (1) является решением этой системы.

Заметим, что используя определение свертки векторов, систему (1) можно записать в следующей форме:

$$P(t, d/dt)\, U(t) = E_1 * \mathfrak{P}(t, d/dt) * U(t), \tag{6}$$

где $E_1 = (0, 1, 0, \dots)$, $\mathfrak{P}(t, d/dt) = (P_0(t, d/dt),\ P_1(t, d/dt), \dots)$. Легко показать, что для того, чтобы линейная комбинация (в смысле определения 1) частных решений произвольной бесконечной треугольной системы дифференциальных уравнений конечного порядка была решением этой системы, необходимо и достаточно, чтобы система имела вид (6).

Определение 2. *Систему вектор-функций $U_k(t)$, $k = \overline{1, l}$, назовем линейно зависимой, если существует система векторов C_k, $k = \overline{1, l}$, не все векторы которой равны одновременно нулю, такая, что линейная комбинация (5) равна нулю.*

Определение 3. *Вронскианом системы вектор-функций $U_i(t)$, $i = \overline{1, m}$, назовем вектор-функцию*

$$W_m(t) = \det{}^* \begin{pmatrix} U_1(t) & \dots & U_m(t) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_1^{(m-1)}(t) & \dots & U_m^{(m-1)}(t) \end{pmatrix},$$

где обозначение det* *означает, что при раскрытии определителя каждое умножение следует заменить сверткой. Например, при $m = 2$ $W_2(t) = U_1(t) * U_2'(t) - U_1'(t) * U_2(t)$.*

Предложение 1. *Вронскиан линейно зависимой системы вектор-функций тождественно равен нулю.*

Доказательство. По условию существуют векторы C_k, $k = \overline{1, m}$, такие, что $\sum\limits_{k=1}^{m} C_k * U_k(t) = 0$. Отсюда следует, что одна из вектор-функций $U_k(t)$ линейно выражается через остальные. Действительно, не ограничивая общности рассуждений можно предположить, что $C_m \neq 0$, более того, $c_{m0} \neq 0$. Тогда $U_m(t) = \sum\limits_{k=1}^{m-1} B_k * U_k(t)$, где $B_k = C_k * D$, $k = \overline{1, m-1}$, а компоненты вектора D определяются из рекуррентных соотношений $d_0 = c_{m0}^{-1}$, $d_n = -\sum\limits_{i=1}^{n} d_{n-i} c_{mi}/c_{m0}$. Теперь $W_m(t) = 0$ в силу определения 3.

Утверждение доказано.

П р е д л о ж е н и е 2. *Если* $U_k(t)$, $k=\overline{1, m}$,— *линейно независимая система решений системы* (1), *то вронскиан* $W_m(t)$ *этой системы вектор-функций нигде не обращается в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Предположим противное. Пусть существует точка t_0, в которой $W_m(t_0)=0$.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных c_{kn}, $k=\overline{1, m}$; $n=\overline{0, \infty}$:

$$\begin{gathered}\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{k,n-i}u_{ki}(t_0)=0;\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad n=\overline{0, \infty},\\ \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=1}^{m} c_{k,n-i}u_{ki}^{(m-1)}(t_0)=0;\end{gathered} \tag{7}$$

которая является записью в развернутом виде соотношений $\sum\limits_{k=1}^{m} C_k * U_k(t_0)=0; \ldots; \sum\limits_{k=1}^{m} C_k * U_k^{(m-1)}(t_0)=0$. Основная матрица рассматриваемой системы — треугольная блочно-теплицева матрица, на главной диагонали которой стоят блоки

$$\begin{pmatrix} u_{10}(t_0) & \ldots & u_{m0}(t_0)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ u_{20}^{(m-1)}(t_0) & \ldots & u_{m0}^{(m-1)}(t_0)\end{pmatrix}.$$

В силу сделанного предположения определитель этого блока $w_{m0}(t_0)=0$. Отсюда и вследствие указанной структуры основной матрицы системы (7) приходим к выводу, что эта система имеет нетривиальное решение C_k, $k=\overline{1, m}$.

Образуем из векторов C_k и решений системы (1) $U_k(t)$ линейную комбинацию $V(t)=\sum\limits_{k=1}^{m} C_k * U_k(t)$. Вектор-функция $V(t)$ тождественно равна нулю вследствие (7) и теоремы единственности. Следовательно, система решений $U_k(t)$, $k=\overline{1, \mathrm{m}}$, линейно зависима.

Полученное противоречие и доказывает утверждение.

О п р е д е л е н и е 4. *Любая система из m линейно независимых частных решений системы* (1) *называется фундаментальной системой решений бесконечной системы дифференциальных уравнений* (1).

Используя рассуждения, аналогичные приведенным при доказательстве предложения 2, а также выводы предыдущих утверждений, можно обобщить на системы вида (1) следующие две теоремы, известные в теории обыкновенных дифференциальных уравнений.

Т е о р е м а 1. *Фундаментальные системы решений бесконечных систем дифференциальных уравнений вида* (1) *существуют.*

Как и в теории обыкновенных дифференциальных уравнений, легко убедиться, что фундаментальных систем решений существует бесчисленное множество.

Т е о р е м а 2. *Всякое решение системы* (1) *можно представить в виде линейной комбинации фундаментальной системы решений.*

Для двух частных случаев системы (1) фундаментальные системы решений построены в [3].

1. *Мак-Лахлан Н. В.* Теория и приложение функций Матье.— М. : Изд-во иностр. лит., 1953.— 475 с.
2. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.— М. : Наука, 1972.— 456 с.

3. *Галазюк В. А., Горечко А. Н.* Об одном методе решения динамических задач теории упругости в сферических и цилиндрических координатах.— Докл. АН УССР. Сер. А, 1980, № 6, с. 40—43.
4. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.— М. : Наука— 1974., 332 с.

Госуниверситет,
Львов

Поступила в редакцию
8.11.80