УДК 517.5

Ю. И. Мельник

Об абсолютной сходимости рядов экспонент, представляющих регулярные в выпуклых многоугольниках функции

1. Пусть $\overline{M}$ — замкнутый выпуклый многоугольник с вершинами в точках $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_N$, $N \geqslant 3$, M — открытая часть $\overline{M}$, $0 \in M, L(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\gamma_k\lambda)$, $d_k \neq 0$, и $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ — последовательность нулей $L(\lambda)$ (для простоты предполагается, что все нули $L(\lambda)$ простые). Пусть $\omega(h)$ — некоторый модуль непрерывности (т. е. $\omega(h)$ задана при $h > 0$, положительна, не убывает, полуаддитивна и $\omega(+0) = 0$); через $AH^{\omega}(\overline{M})$ обозначим класс функций $f(z)$, которые регулярны в M, непрерывны в $\overline{M}$ и удовлетворяют условию $|f(z_1) - f(z_2)| \leqslant \mathrm{const}\,\omega(h)$ для любых $z_1, z_2 \in M$ таких, что $|z_1 - z_2| \leqslant h$. Через $AC^{\infty}(\overline{M})$ обозначим класс функций, регулярных в M и имеющих непрерывные производные любого порядка в $\overline{M}$.

Пусть $f(z)$ регулярна в M и непрерывна в $\overline{M}$. Известно [1, гл. IV], что при $z \in M$ функцию $f(z)$ можно представить в виде ряда экспонент

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \varkappa_f(\lambda_m) \frac{\exp(\lambda_m z)}{L'(\lambda_m)}, \tag{1}$$

где

$$\varkappa_f(\lambda_m) = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_0^{\gamma_k} f(\gamma_k - \zeta) \exp(\lambda_m\zeta)\, d\zeta. \tag{2}$$

В данной работе исследуется абсолютная сходимость рядов вида (1) в замкнутом многоугольнике $\overline{M}$* (задача предложена П. Л. Ульяновым). Доказан следующий аналог известной теоремы Бернштейна [2, с. 384; 3, с. 21, 22].

Теорема. *Пусть* $f(z) \in AH^{\omega}(\overline{M})$ *и выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f(\gamma_k) = 0. \tag{3}$$

Тогда: 1) *если* $\int_0^1 \omega(t)\, t^{-3/2} dt = C < \infty$, *то ряд* (1) *сходится абсолютно в* $\overline{M}$; 2) *при* $C = \infty$ *абсолютная сходимость ряда* (1) *в* $\overline{M}$ *может не иметь места.*

2. Для доказательства теоремы потребуются следующие свойства $L(\lambda)$:

а) вдали от начала координат нули $L(\lambda)$ (обозначим их $\lambda_n^{(j)}$) имеют вид $\lambda_n^{(j)} = \overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} + \delta_n^{(j)}$, где

$$\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} = \frac{2\pi ni}{\gamma_{j+1} - \gamma_j} + q_j \exp(i\alpha_j), \quad |\delta_n^{(j)}| \leqslant \exp(-an), \quad 0 < a = \mathrm{const}, \tag{4}$$

$j = 1, 2, \ldots, N$, $n > n_0$, $\gamma_{N+1} \overset{\mathrm{df}}{=} \gamma_1$, α_j, q_j — некоторые числа, для которых

$$\exp\{q_j(\gamma_{j+1} - \gamma_j) \exp(i\alpha_j) = -d_j/d_{j+1}; \tag{5}$$

б) $\exists\, a_1 > 0\ \forall\, z \in \overline{M}$: $|\exp(\lambda_n^{(j)} z)/z'(\lambda_n^{(j)})| \leqslant a_1$;

в) $\exists\, a_2 > 0$, $z_0 \in \overline{M}$: $|\exp(\lambda_n^{(j)} z_0)/L'(\lambda_n^{(j)})| \geqslant a_2$;

г) $\exists A_3 > 0,\ a_3 > 0\ \forall n \in \mathbf{N},\quad \zeta \in [\gamma_j; \gamma_k]$: $\left|\exp(\lambda_n^{(j)}(\gamma_k - \zeta)) - \exp(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} \times \right.$ $\left. \times (\gamma_k - \zeta))\right| \leqslant A_3 \exp(-a_3 n)$;

д) $\exists A_4 > 0,\ a_4 > 0\ \forall k, n \in \mathbf{N},\ z \in \overline{M}$:

$$\left| \frac{(\lambda_n^{(j)})^k \exp(\lambda_n^{(j)} z)}{L'(\lambda_n^{(j)})} - (-1)^n B_j \exp\left\{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)} \left(z - \frac{\gamma_{j+1} + \gamma_j}{2}\right)\right\} \right| \leqslant A_4 \exp(-a_4 n),$$

$$B_j \neq 0,\ B_j = \mathrm{const}.$$

Свойство a) имеется в теореме 1.2.10 из [1], остальные легко можно вывести на основании гл. I той же книги.

3. Доказательство теоремы опирается на следующую лемму.

Лемма. *Пусть* $f(z) \in AH^{\omega}(\overline{M})$. *Тогда для каждого фиксированного* $1 \leqslant j \leqslant N$ *имеется такая* 2π-*периодическая функция* $F_j(t)$ *действительного переменного* t *из класса* H^{ω} $(f \in H^{\omega} \Leftrightarrow |f(t_1) - f(t_2)| \leqslant \mathrm{const}\,\omega(h)$, $|t_1 - t_2| \leqslant h)$, *что с точностью до* $O(n^{-1}\omega(n^{-1}))$ *числа* $\varkappa_f(\lambda_n^{(j)})$, $n = n_0, n_0 + 1, \ldots,$ — *коэффициенты Фурье функции* $F_j(t)$:

$$\varkappa_f(\lambda_n^{(j)}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F_j(t) \exp(-int)\, dt + O(n^{-1}\omega(n^{-1})). \tag{6}$$

Соотношение (6) в случае, когда $d_1 = d_2 = \ldots = d_N = 1$, т. е. $L(\lambda) = \sum_{k=1}^{N} \exp(\gamma_k \lambda)$, установлено в работе [4].

Доказательство (6) будем проводить аналогичным образом. Ниже различные положительные постоянные будем обозначать через c. Из соотношения (2) и свойства г) следует, что

$$\varkappa_f(\lambda_n^{(j)}) = \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_j}^{\gamma_k} f(\zeta) \exp(-\lambda_n^{(j)}(\zeta - \gamma_k))\, d\zeta =$$

$$= \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_j}^{\gamma_k} f(\zeta) \exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\zeta - \gamma_k))\, d\zeta + O(\exp(-a_3 n)) = \tag{7}$$

$$= \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_j}^{\gamma_k} \{f(\zeta) - \varphi_{j,k}(\zeta)\} \exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\zeta - \gamma_k))\, d\zeta +$$

$$+ \sum_{k=1}^{N} d_k \int_{\gamma_j}^{\gamma_k} \varphi_{j,k}(\zeta) (\exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\zeta - \gamma_k))\, d\zeta + O(\exp(-a_3 n)) =$$

$$= \varkappa^{(1)}(n) + \varkappa^{(2)}(n) + O(\exp(-a_3 n)),$$

где $\varphi_{j,k}(\zeta) \overset{\mathrm{df}}{=} f(\gamma_j) + (f(\gamma_k) - f(\gamma_j))(\zeta - \gamma_j)/(\gamma_k - \gamma_j)$. Далее прямым подсчетом находим, что

$$\varkappa_k^{(2)}(n) \overset{\mathrm{df}}{=} \int_{\gamma_j}^{\gamma_k} \varphi_{j,k}(\zeta) \exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\zeta - \gamma_k))\, d\zeta = -f(\gamma_k) \frac{1}{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}} +$$

$$+ \frac{f(\gamma_k) \exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\gamma_j - \gamma_k))}{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}} - \frac{f(\gamma_k) - f(\gamma_j)}{(\gamma_k - \gamma_j)(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})^2} - \tag{8}$$

$$-\frac{[f(\gamma_k)-f(\gamma_j)]\exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\gamma_j-\gamma_k))}{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}}+$$

$$+\frac{[f(\gamma_k)-f(\gamma_j)]\exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\gamma_j-\gamma_k))}{(\gamma_k-\gamma_j)(\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})^2},\quad k\neq j.$$

Если $k\neq j+1$, то из соотношения (4) и легко проверяемого в случае выпуклых многоугольников неравенства

$$\operatorname{Re}\{i(\gamma_j-\gamma_k)/(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\}>0 \tag{9}$$

следует, что все члены в (8), содержащие экспоненциальный множитель, есть $O(\exp(-cn)$. Поэтому, используя (4), из (8) получаем

$$\varkappa_k^{(2)}(n)=-f(\gamma_k)(1/\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)})+O(n^{-2}),\quad k\neq j+1. \tag{10}$$

При $k=j+1$ с учетом (5) и (4) после несложных вычислений получаем

$$\varkappa_{j+1}^{(2)}(n)=-\frac{d_{j+1}f(\gamma_{j+1})+d_jf(\gamma_j)}{d_{j+1}}\frac{1}{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}}+O(n^{-2}). \tag{11}$$

Из (10), (11), учитывая (3), находим

$$\varkappa^{(2)}(n)=\sum_{k\neq j}d_k\varkappa_k^{(2)}(n)=-\frac{1}{\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}}\sum_{k=1}^{N}d_kf(\gamma_k)+O(n^{-2})=O(n^{-2}). \tag{12}$$

Рассмотрим последовательность $\{\varkappa^{(1)}(n)\}$. Используя (4), получаем

$$\varkappa^{(1)}(n)=\sum_{k=1}^{N}d_k\varkappa_k^{(1)}(n), \tag{13}$$

где

$$\varkappa_k^{(1)}(n)\overset{\mathrm{df}}{=}\int_{\gamma_j}^{\gamma_k}\{f(\zeta)-\varphi_{j,k}(\zeta)\}\exp(-\overset{0}{\lambda}{}_n^{(j)}(\zeta-\gamma_k))\,d\zeta=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left[f_{j,k}(\theta)\exp\left\{-q_j\exp(i\alpha_j)\frac{(\gamma_j-\gamma_k)\theta}{2\pi}\right\}\right]\exp\left\{-in\frac{\gamma_j-\gamma_k}{\gamma_{j+1}-\gamma_j}\theta\right\}d\theta, \tag{14}$$

$$f_{j,k}(\theta)=(\gamma_k-\gamma_j)\left[f\left(\gamma_j+\frac{\gamma_j-\gamma_k}{2\pi}\theta\right)-\varphi_{j,k}\left(\gamma_j+\frac{\gamma_j-\gamma_k}{2\pi}\theta\right)\right].$$

Из условия леммы и определения функции $\varphi_{j,k}$ следует, что $f_{j,k}$ обладает свойствами $f_{j,k}\in H^{\omega}$ и $f_{j,k}(0)=f_{j,k}(2\pi)=0$. При $k\neq j+1$ отсюда, из неравенства (9) и соотношения (14) следует, что

$$|\varkappa_k^{(1)}(n)|\leqslant c'\int_0^{2\pi}\omega(t)\exp(-cnt)\,dt\leqslant\frac{c'}{n}\int_0^{\infty}\omega\left(\frac{u}{n}\right)\exp(-cu)\,du\leqslant$$

$$\leqslant\varepsilon'\frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\int_0^{\infty}(u+1)\exp(-cu)\,du=O\left(\frac{1}{n}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),\quad k\neq j+1. \tag{15}$$

Полагая $F_j(\theta) = f_{j,j+1}(-\theta) \exp\left\{q_j \exp(i\alpha_j) \dfrac{\gamma_j - \gamma_{j+1}}{2\pi}\theta\right\}$, видим, что $F_j(\theta)$ удовлетворяет всем условиям леммы, а из (14) при $k = j+1$ следует

$$\varkappa_{j+1}^{(1)}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_j(\theta)\exp(-in\theta)\,d\theta. \tag{16}$$

Из (13), (15), (16) следует

$$\varkappa^{(1)}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F_j(\theta)\exp(-in\theta)\,d\theta + O\left(\frac{1}{n}\,\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right),$$

где функция F_j удовлетворяет всем условиям леммы. Отсюда и из соотношений (7), (12) следует (6). Лемма доказана.

Доказательство теоремы. Отметим, что в силу свойств *б*) и *в*) абсолютная сходимость ряда (1) в $\overline{M}$ эквивалентна сходимости ряда $\sum\limits_m |\varkappa_f(\lambda_m)|$. Справедливость утверждения (1) теперь немедленно следует из леммы и теоремы Бернштейна.

Докажем утверждение 2). Положим (при фиксированном достаточно большом m_0) $F(w) = \sum\limits_{m=m_0}^{\infty} a_m p_m(w)$, где $a_m \geqslant 0$, $\sum\limits_{m=m_0}^{\infty} a_m 2^{-m/2} < \infty$, $p_m(w) = \sum\limits_{2^m \leqslant n < 2^{m+1}} b_n w^n$, $\sum\limits_{2^m \leqslant n < 2^{m+1}} |b_n| = 1$, $\max\limits_{|w|=1} |p_m(w)| < \text{const}\, 2^{-m/2}$.

Известно [3, с. 22—24], что числа a_m могут быть подобраны так, что $F(e^{i\theta}) \in H^\omega$ и

$$\sum_{m=m_0}^{\infty} a_m = +\infty. \tag{17}$$

Из условия $F(e^{i\theta}) \in H^\omega$ и известной контурно-телесной теоремы [5] следует

$$|F(w_1) - F(w_2)| \leqslant \text{const}\,\omega(h),\ |w_1| \leqslant 1,\ |w_2| \leqslant 1,\ |w_1 - w_2| \leqslant h. \tag{18}$$

Пусть (при фиксированном j) $F_1(z) = F(\exp\{i(z-\gamma_j)\,2\pi/(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\})$, $z \in \overline{M}$. Так как $|\exp\{i(z-\gamma_j)\,2\pi/(\gamma_{j+1}-\gamma_j)\}| \leqslant 1$ при $z \in \overline{M}$, то отсюда и из соотношения (18) следует

$$F_1(z) \in AH^\omega(\overline{M}). \tag{19}$$

Положим $F_2(z) = B_j \exp\{(\gamma_j - \gamma_{j+1})\, q_j \exp(i\alpha_j)/2\} F_1(z) \exp\{q_j \exp(i\alpha_j) \times (z - \gamma_j)\}$. Из соотношения (19) следует:

$$F_2(z) \in AH^\omega(\overline{M}). \tag{20}$$

С другой стороны, используя (4), с помощью простых вычислений находим

$$F_2(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m \left(\sum_{2^m \leqslant n < 2^{m+1}} (-1)^n B_j b_n \exp\left\{\lambda_n^{(j)}\left(z - \frac{\gamma_{j+1}-\gamma_j}{2}\right)\right\}\right). \tag{21}$$

Пусть

$$f(z) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m \left(\sum_{2^m \leqslant n < 2^{m+1}} b_n \frac{\exp(\lambda_n^{(j)} z)}{L'(\lambda_n^{(j)})}\right). \tag{22}$$

Рассмотрим функцию $\varphi(z) = f(z) - F_2(z)$. В силу свойства *д*) $\varphi(z) \in AC^\infty(\overline{M})$, так что в силу (20) $f(z) = F_2(z) + \varphi(z) \in AH^\omega(\overline{M})$. Отметим, что по построению ряд (21), а вместе с ним и ряд (22) сходятся равномерно в

$\overline{M}$. Отсюда немедленно заключаем [1, гл. IV], что ряд (22) имеет вид (1), т. е. его коэффициенты подсчитываются по формуле (2). Проверка выполнения условия (3) для $f(z)$ не представляет труда:

$$\sum_{k=1}^{N} d_k f(\gamma_k) = \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m \left(\sum_{2^m \leqslant n < 2^{m+1}} b_n \frac{1}{L'(\lambda_n^{(j)})} \sum_{k=1}^{N} d_k \exp(\lambda_n^{(j)} \gamma_k) \right) =$$

$$= \sum_{m=m_0}^{\infty} a_m \left(\sum_{2^m \leqslant n < 2^{m+1}} b_n \frac{L(\lambda_n^{(j)})}{L'(\lambda_n^{(j)})} \right) = 0,$$

так как $\lambda_n^{(j)}$ — нули $L(\lambda)$. Видно, что $f(z)$ удовлетворяет всем требованиям теоремы, и в то же время в силу (17) ряд (22) не сходится абсолютно в $\overline{M}$. Этим справедливость утверждения 2), а вместе с тем и теоремы доказана.

З а м е ч а н и е. При $\omega(h) = h^{\alpha}$, $\alpha > 0$, аналогично может быть доказан аналог теоремы А. Зигмунда [2, с. 385].

1. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.— М. : Наука, 1976.— 536 с.
2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2-х томах, т. 1.— М. : Мир, 1965.— 615 с.
3. *Кахан Ж.-П.* Абсолютно сходящиеся ряды Фурье.— М. : Мир, 1976.— 204 с.
4. *Дзядык В. К.* Об условиях сходимости рядов Дирихле на замкнутых многоугольниках. Мат. сб., 1974, **94**, № 4, с. 475—493.
5. *Тамразов П. М.* Контурные и телесные структурные свойства голоморфных функций комплексного переменного.— Успехи мат. наук, 1973, **28**, № 1, с.

Институт математики АН УССР,
Киев

Поступила в редакцию
14.12.82