

Г. А. Шаршанова

О мероморфных характеристических функциях с бесконечным числом полюсов

В статье получены достаточные условия характеристичности мероморфных функций, все полюсы которых лежат на прямой, параллельной вещественной оси, и имеют одинаковый порядок. Кроме того, найдены необходимые и достаточные условия, которым должно удовлетворять множество пар $\{\tau_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$, где $\tau_k \in \mathbb{C}$, $n_k \in \mathbb{N}$, чтобы существовала мероморфная характеристическая функция с полюсами только в точках τ_k порядков n_k .

Т е о р е м а. Пусть в \mathbb{C} дана последовательность точек

$$-i\alpha, \tau_1, -\bar{\tau}_1, \dots, \tau_k, -\bar{\tau}_k, \dots, \quad (1)$$

$$\alpha \neq 0, \tau_k = \xi_k - i\alpha, \xi_{k+1} > \xi_k > 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \xi_k = \infty \quad (2)$$

и последовательность рациональных функций

$$\varphi_0(t) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right)^i, \quad a_1, \dots, a_{n-1} \in \mathbb{R}, \quad a_n > 0, \quad (3)$$

$$\varphi_k(t) = \sum_{l=1}^m \left[\lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k} \right)^l + \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k} \right)^l \right], \quad \lambda_{km} \neq 0. \quad (4)$$

Пусть выполняется неравенство

$$a_m |\alpha|^m > 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{km}| |\tau_k|^m. \quad (5)$$

Тогда существует мероморфная характеристическая функция с полюсами только в точках (1) и главными частями (3),

$$\sum_{l=1}^m \lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k} \right)^l, \quad \sum_{l=1}^m \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k} \right)^l. \quad (6)$$

Доказательство. Докажем теорему для $\alpha > 0$, т. е. все точки последовательности (1) расположены в нижней полуплоскости, тогда доказательство теоремы в случае $\alpha < 0$ будет сразу вытекать из того, что функции $\varphi(t)$ и $\varphi(-t)$ одновременно являются характеристическими.

Рассмотрим случай $m > 1$. Предположим сначала, что $a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$. При таком предположении (3) содержит лишь одно слагаемое. Из (5) следует, что существует $\delta > 0$ такое, что

$$(a_m - \delta) \alpha^m > 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{km}| |\tau_k|^m. \quad (7)$$

Возьмем какое-нибудь $\delta > 0$, удовлетворяющее (7), и рассмотрим две группы последовательностей рациональных функций:

$$\delta \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right)^m, \quad \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k} \right)^l \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{ \sum_{l=1}^{m-1} \bar{\lambda}_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k} \right)^l \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad (8)$$

$$(a_m - \delta) \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right)^m, \quad \left\{ \lambda_{km} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k} \right)^m \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{ \bar{\lambda}_{km} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k} \right)^m \right\}_{k=1}^{\infty}. \quad (9)$$

Согласно следствию 2 из [3] существует мероморфная характеристическая функция $\psi_1(t)$ абсолютно непрерывного распределения на $[0, +\infty)$ с полюсами (1) и главными частями (8).

Построим характеристическую функцию $\psi_2(t)$ с полюсами (1) и главными частями (9). Имеем

$$s_k(t) = \lambda_{km} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k} \right)^m + \bar{\lambda}_{km} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k} \right)^m = \int_0^{\infty} e^{itx} \rho_k(x) dx,$$

где

$$\rho_k(x) = 2 \operatorname{Re} e^{-i\tau_k x} \lambda_{km} \frac{(i\tau_k)^m}{(m-1)!} x^{m-1}.$$

Далее,

$$(a_m - \delta) \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right)^m = \int_0^{\infty} e^{itx} \rho_0(x) dx,$$

где

$$\rho_0(x) = \frac{a_m - \delta}{(m-1)!} \alpha^m x^{m-1} e^{-\alpha x}.$$

В силу (7) ряд

$$(a_m - \delta) \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right)^m + \sum_{k=1}^{\infty} s_k(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{itx} \rho_k(x) dx \quad (10)$$

равномерно сходится на любом компакте в \mathbb{C} и поэтому представляет собой мероморфную функцию с полюсами (1) и главными частями (9). Условие (7) дает также возможность переставить местами в (10) суммирование и интегрирование. Поэтому правую часть в (10) можно представить в виде $\int_0^{\infty} e^{itx} p(x) dx$, где в силу неравенства (7)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0. \quad (11)$$

Благодаря (11) функция (10) — характеристическая с точностью до положительного множителя. Если значение функции при $t = 0$ больше или равно 1, то положим

$$\psi_2(t) = \int_a^{\infty} e^{itx} p(x) dx = \int_0^{\infty} e^{itx} p(x) dx - \int_0^a e^{itx} p(x) dx,$$

где $a \geq 0$ таково, что $\int_a^{\infty} p(x) dx = 1$; $\psi_2(t)$ — мероморфная характеристическая функция с полюсами (1) и главными частями (9), так как вычитаемое $\int_0^a e^{itx} p(x) dx$ — целая функция. Если же значение функции при $t = 0$ меньше 1, то положим

$$\psi_2(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} p(x) dx + \left(1 - \int_0^{\infty} p(x) dx\right).$$

И в этом случае $\psi_2(t)$ — мероморфная характеристическая функция с полюсами только в точках (1) и главными частями (9). Таким образом, функция $\psi_2(t)$ построена.

Функция $\psi_1(t) + \psi_2(t)$ с точностью до положительного множителя мероморфная характеристическая с полюсами (1) и главными частями (3), (6). Поэтому, как и выше, можно подобрать целую функцию $h(t)$ так, чтобы $\psi_1(t) + \psi_2(t) + h(t)$ была в точности характеристической функцией. Тем самым теорема в случае $a_1 = \dots = a_{m-1} = 0$ доказана.

Пусть в (3) присутствует не только одно слагаемое. Выберем положительное число $\varepsilon > 0$ так, чтобы выполнялось

$$(a_m - \varepsilon) \alpha^m > 2 \sum_{k=1}^{\infty} |\lambda_{km}| |\tau_k|^m.$$

Согласно рассмотренному выше случаю можно построить мероморфную характеристическую функцию $\psi_1(t)$ с полюсами (1) и главными частями

$$(a_m - \varepsilon) \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha}\right)^m, \quad \left\{ \sum_{l=1}^m \lambda_{kl} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k}\right)^l \right\}_{k=1}^{\infty}, \quad \left\{ \sum_{l=1}^m \lambda_{kl} \left(\frac{\bar{\tau}_k}{t + \bar{\tau}_k}\right)^l \right\}_{k=1}^{\infty},$$

а по теореме 4 из [2] существует мероморфная характеристическая функция $\psi_2(t)$ с полюсом в точке $-i\alpha$ и главной частью

$$\sum_{l=1}^{m-1} a_l \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha}\right)^l + \varepsilon \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha}\right)^m.$$

Функция $\psi_1(t) + \psi_2(t)$ с точностью до положительного множителя характеристическая с полюсами (1) и главными частями (3), (6). Поэтому, как и выше, можно подобрать целую функцию $h(t)$, чтобы $\psi_1(t) + \psi_2(t) + h(t)$ была характеристической функцией. Следовательно, для $m > 1$ теорема тоже доказана.

Рассмотрим случай $m = 1$. В силу (5) ряд

$$\varphi(t) = a_1 \left(\frac{i\alpha}{t + i\alpha} \right) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lambda_{k1} \left(\frac{-\tau_k}{t - \tau_k} \right) + \lambda_{k1} \left(\frac{-\bar{\tau}_k}{t + \tau_k} \right) \right] = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^{\infty} e^{itx} p_k(x) dx, \quad (12)$$

где

$$p_k(x) = \begin{cases} a_1 \alpha e^{-\alpha x}, & k = 0, \\ 2 \operatorname{Re} e^{-i\tau_k x} \lambda_{k1}(i\tau_k), & k \neq 0, \end{cases}$$

равномерно сходится на любом компакте в \mathbb{C} и поэтому представляет собой мероморфную функцию с полюсами (1) и главными частями (3), (6). Условие (5) дает также возможность переставить в (12) местами суммирование и интегрирование. Поэтому $\varphi(t)$ можно представить в виде $\int_0^{\infty} e^{itx} p(x) dx$, где в силу неравенства (5)

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k(x) \geq 0 \quad \forall x \geq 0.$$

Поэтому $\varphi(t)$ с точностью до положительного множителя — характеристическая функция, и, следовательно, можно подобрать целую функцию $h(t)$ так, чтобы $\varphi(t) + h(t)$ была характеристической функцией.

Таким образом, теорема полностью доказана.

Из этой теоремы и следствий 1 и 2 работы [3] вытекает следствие.

Следствие. Для множества пар $\{\tau_k, n_k\}_1^{\infty}$, где $\tau_k \in \mathbb{C}$, $n_k \in \mathbb{N}$, существует мероморфная характеристическая функция с полюсами порядка n_k в точках τ_k тогда и только тогда, когда выполняются условия: в множестве $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ есть точки $-i\alpha$ или $i\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что $|\operatorname{Im} \tau_k| \geq \alpha$, если $\tau_k \in \{t: \operatorname{Im} t < 0\}$, $\operatorname{Im} \tau_k \geq \beta$, если $\tau_k \in \{t: \operatorname{Im} t \geq 0\}$; точки множества $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ располагаются симметрично относительно мнимой оси или лежат на ней; точкой сгущения множества $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ может быть лишь бесконечно удаленная точка: числа n_k , соответствующие точкам, лежащим на прямой $\operatorname{Im} t = -\alpha$, не превосходят числа m , соответствующего точке $-i\alpha$, числа n_k , соответствующие точкам, лежащим на прямой $\operatorname{Im} t = \beta$, не превосходят числа n , соответствующего точке $i\beta$, на числа n_k для остальных точек ограничений не налагается.

Доказательство. Необходимость. Из следствий 7.1.1 и 7.1.2 в [1, с. 230] вытекает, что в множестве $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ есть точки $-i\alpha$ или $i\beta$, где $\alpha > 0$, $\beta > 0$, такие, что $|\operatorname{Im} \tau_k| \geq \alpha$, если $\tau_k \in \{t: \operatorname{Im} t < 0\}$; $\operatorname{Im} \tau_k \geq \beta$, если $\tau_k \in \{t: \operatorname{Im} t \geq 0\}$; точки множества $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ располагаются симметрично относительно мнимой оси или лежат на ней. Так как функция мероморфная, то точкой сгущения системы $\{\tau_k\}_1^{\infty}$ может быть лишь бесконечно удаленная точка. Покажем, что числа n_k , соответствующие точкам, лежащим на прямой $\operatorname{Im} t = -\alpha$, не превосходят числа m , соответствующего точке $-i\alpha$.

Известно (см. [1]), что характеристическая функция, голоморфная в полосе $-\alpha < \operatorname{Im} t < \beta$, хребтовая в этой полосе, т. е. удовлетворяет неравенству

$$|\varphi(\xi + i\eta)| \leq \varphi(i\eta) \quad \forall \xi \in \mathbb{R}, \eta \in]-\alpha, \beta[. \quad (13)$$

Пусть $\operatorname{Im} \tau_k = -\alpha$, n_k — порядок τ_k . Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо представление

$$|\varphi(\tau_k + i\varepsilon)| = A(e^{n_k})^{-1} (1 + a(\varepsilon)), \quad (14)$$

где $A \neq 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a(\varepsilon) = 0$. Для достаточно малых $\varepsilon > 0$ справедливо также представление

$$\varphi(-i\alpha + i\varepsilon) = B(\varepsilon^m)^{-1}(1 + b(\varepsilon)), \quad (15)$$

где $B \neq 0$, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} b(\varepsilon) = 0$. Так как по свойству (13) $|\varphi(\tau_k + i\varepsilon)| \leq \varphi(-i\alpha + i\varepsilon)$ для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$, то из (14) и (15) вытекает, что $m \geq n_k$.

Точно так доказывается, что числа n_k , соответствующие точкам, лежащим на прямой $\text{Im } t = \beta$, не превосходят числа n , соответствующего точке $i\beta$. Необходимость, таким образом, доказана.

Д о с т а т о ч н о с т ь. Существование искомой функции очевидно, если использовать следствие 2 из [3], доказанную теорему и рассуждения, идущие после формулы (11).

Следствие доказано.

1. Лукач Е. Характеристические функции.— М.: Наука, 1979.— 424 с.
2. Шаршанова Г. А. О мероморфных характеристических функциях с одним полюсом.— Укр. мат. журн., 1982, 34, № 5, 657—661 с.
3. Гинзбург Б. Н., Шаршанова Г. А. Об особенностях аналитических эрмитово-положительных функций.— Теор. функц., функциональный анализ и их приложения, 1983, вып. 39, с. 25—31.

Харьков. гос. ун-т

Поступила в редакцию 20.08.81,
после переработки — 10.01.83

В ИЗДАТЕЛЬСТВЕ «НАУКОВА ДУМКА» В 1984 г. ВЫЙДЕТ В СВЕТ КНИГА:

Пташник Б. И. НЕКОРРЕКТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ. 20 л. 3 р. 30 к.

Монография посвящена исследованию корректности неклассических задач для линейных дифференциальных уравнений и систем с частными производными гиперболического и составного типов. Разрешимость этих задач связана с проблемами малых знаменателей и является неустойчивой по отношению к малым изменениям области, а также коэффициентов уравнений и граничных условий. Установлены условия существования, единственности и непрерывной зависимости решений от данных задачи, формулируемых в теоретико-числовых терминах. Построены явные формулы в виде рядов для решений рассматриваемых задач. Дан анализ оценок малых знаменателей, базирующихся на современных методах метрической теории чисел.

Для специалистов по дифференциальным уравнениям, математической физике, метрической теории чисел.

Предварительные заказы на эту книгу принимают все магазины книготоргов, магазины «Книга — почтой» и «Академкнига». Просим пользоваться услугами магазинов — опорных пунктов издательства: Дома книги — магазина № 200 (340048, Донецк-48, ул. Артема, 147а), магазина «Книжный мир» (310003, Харьков-3, пл. Советской Украины, 2/2), магазина научно-технической книги № 19 (290006, Львов-6, пл. Рынок, 10), магазина «Техническая книга» (270001, Одесса-1, ул. Ленина, 17) и магазина издательства «Наукова думка» (252001, Киев-1, ул. Кирова, 4).

Магазины во Львове и Киеве высылают книги иногородним заказчикам наложенным платежом.