УДК 512

Л. Н. Кусковский

Построение полиномиальной супералгебры

В алгебре $\mathscr{A}$, заданной определяющим уравнением, строится базис (стандартный) с удобным законом умножения, указываются формулы перехода от этого базиса к исходному, показывается, что $\mathscr{A}$ обладает структурой Z_2-градуированного пространства.

В алгебрі $\mathscr{A}$, заданій визначаючим рівнянням, будується базис (стандартний) із зручним законом множення, вказуються формули переходу від цього базису до вихідного, показується, що $\mathscr{A}$ має структуру Z_2-градуйованого простору.

1. Линейное $(m+n)$-мерное пространство над полем комплексных чисел C наделим структурой алгебры $\mathcal{A}$, коммутативной и ассоциативной, с базисом

$$\varepsilon^0 = 1_{\mathscr{A}}, \varepsilon, \ldots, \varepsilon^{m+n-1}, \quad \varepsilon^k\varepsilon^h = \varepsilon^{k+h}, \quad k, h = 0, 1, \ldots; \qquad k+h \leqslant m+n-1, \tag{1}$$

и определяющим уравнением

$$f(\varepsilon)=\prod_{\nu=0}^{\mu}(\varepsilon-a_\nu)^{s_\nu}\prod_{k=1}^{m}(\varepsilon-r_k)=0, \tag{2}$$

где $a_0=0$, $a_\nu\neq a_\gamma$, $\nu\neq\gamma$; $r_k\neq r_j$, $k\neq j$, $a_\nu\neq 0$, $\nu=1,\dots,\mu$, $r_k\neq 0$ — комплексные числа. Пусть $s_0+s_1+\dots+s_\mu=n$, тогда $\dim\mathcal{A}=m+n$.

Алгебры $\mathcal{A}$ с определяющим уравнением вида (2) А. Албертом были названы полиномиальными. Если $s_\nu=0$, $\nu=0,\dots,\mu$, то имеем алгебру, используемую Брювье [1, с. 227] при построении теории тригонометрических и гиперболических функций порядка n. В [2] мы дали приложения алгебры $\mathcal{A}$ при $s_0=3$, $s_1=2$, $s_\nu=0$, $\nu=2,\dots,\mu$, к исследованию систем дифференциальных уравнений вида (21).

Построению и изучению пространств над различными алгебрами векторов размерности выше двух посвящено много работ (см., например, [3]).

В данной статье мы построим в алгебре $\mathcal{A}$ базис (стандартный) с удобным законом умножения, укажем формулы перехода от стандартного базиса к базису (1), покажем, что $\mathcal{A}$ обладает структурой градуированного пространства.

2. Свойства элементов e_k, $k=1,\dots,m+1$, и ω_j, $j=1,\dots,n-1$. Введем «новые» элементы алгебры $\mathcal{A}$:

$$e_k=\frac{F_k(\varepsilon)\prod_{\nu=0}^{\mu}(\varepsilon-a_\nu)^{s_\nu}}{F_k(r_k)\prod_{\nu=0}^{\mu}(r_k-a_\nu)^{s_\nu}}, \tag{3}$$

где

$$F_k(\varepsilon)=\prod_{i=1}^{k-1}(\varepsilon-r_i)\prod_{i=k+1}^{m}(\varepsilon-r_i),\quad k=1,\dots,m, \tag{4}$$

$$e_{m+1}=1_{\mathcal{A}}-\sum_{k=1}^{m}e_k, \tag{5}$$

$$\omega_j=\varepsilon^j e_{m+1},\quad j=1,\dots,n-1. \tag{6}$$

Лемма 1.
(i) $e_ke_s=0$, $k\neq s$, $k,s=1,\dots,m$;
(ii) $e_k^2=e_k$, $k=1,\dots,m$;
(iii) $e_{m+1}e_s=0$, $s=1,\dots,m$;
(iv) $e_{m+1}^2=e_{m+1}$;
(v) $\omega_je_k=0$, $j=1,\dots,n-1$; $k=1,\dots,m$;
(vi) $\omega_je_{m+1}=\omega_j$, $j=1,\dots,n-1$.

Доказательство. Свойство (*i*) сразу следует из вида (3) элементов e_k и определяющего уравнения (2). Далее, поскольку $e_k(\varepsilon-r_k)=0$, имеем $\varepsilon e_k=r_ke_k$, откуда $\varepsilon(\varepsilon e_k)=r_k(\varepsilon e_k)=(r_k)^2e_k$ и

$$\varepsilon^Ne_k=(r_k)^Ne_k,\quad N=1,2,\dots. \tag{7}$$

Теперь в силу того, что $(\varepsilon-r_j)e_k=(r_k-r_j)e_k$, и (3) имеем (ii). Свойство (iii) следует сразу из свойств (i), (ii) и вида e_{m+1}. Свойство (iv) следует из (iii) и вида (5). Так как $\omega_je_k=(\varepsilon^je_{m+1})e_k=\varepsilon^j(e_{m+1}e_k)=0$, $j=1,\dots,n-1$; $k=1,\dots,m$, то имеем (v). Свойство (vi) сразу следует из (iV) и (6). Лемма доказана.

Установим формулы перехода от элементов e_k, $k=1,\dots,m+1$, ω_j, $j=1,\dots,n-1$, к элементам ε^k, $k=0,\dots,m+n-1$ (1).

Согласно формулам (6), (5) и (7) имеем $\omega_j=\varepsilon^j-\sum_{k=1}^{m}(r_k)^je_k$, $j=1,\dots$

$\ldots, n-1$, отсюда

$$\varepsilon^j = \omega_j + \sum_{k=1}^{m} (r_k)^j e_k, \quad j = 1, \ldots, n-1. \tag{8}$$

Далее, нетрудно доказать тождество $\sum\limits_{k=1}^{m} \frac{F_k(\varepsilon)}{F_k(r_k)} \equiv 1$. Теперь в силу этого тождества и вида e_k (3) имеем

$$\sum_{k=1}^{m} \prod_{\nu=0}^{\mu} (r_k - a_\nu)^{s_\nu} e_k = \prod_{\nu=0}^{\mu} (\varepsilon - a_\nu)^{s_\nu}. \tag{9}$$

Поскольку

$$(\varepsilon - a_\nu)^{s_\nu} = \sum_{l=0}^{s_\nu} A_l^\nu \varepsilon^l, \tag{10}$$

где коэффициенты A_l^ν удобней представить рекуррентными формулами

$$A_l^\nu = \alpha_l^\nu (a_\nu)^{s_\nu - l}, \quad \alpha_{l+1}^\nu = \frac{l - s_\nu}{l+1} \alpha_l^\nu, \quad \nu = 1, \ldots, \mu, \quad \alpha_0^\nu = 1, \tag{11}$$

имеем

$$\prod_{\nu=0}^{\mu} (\varepsilon - a_\nu)^{s_\nu} = \varepsilon^n + \sum_{l=0}^{(s_1+\ldots+s_\mu)-1} \gamma_l^{12\ldots\mu} \varepsilon^{l+s_0}, \tag{12}$$

где

$$\gamma_l^{12} = \sum_{k=0}^{l} A_k^1 A_{l-k}^2, \tag{13}$$

$$\gamma_l^{12\ldots\nu} = \sum_{k=0}^{l} \gamma_k^{12\ldots(\nu-1)} A_{l-k}^\nu, \quad \nu = 3, \ldots, \mu. \tag{14}$$

В силу (12) и (9)

$$\varepsilon^n = \sum_{k=1}^{m} \prod_{\nu=0}^{\mu} (r_k - a_\nu)^{s_\nu} e_k - \sum_{l=0}^{(s_1+\ldots+s_\mu)-1} \gamma_l^{12\ldots\mu} \varepsilon^{l+s_0}. \tag{15}$$

Подставив в (15) вместо ε^{l+s_0} их выражения из (8), после несложных вычислений получим

$$\varepsilon^n = \sum_{k=1}^{m} (r_k)^n e_k - \sum_{l=0}^{(s_1+\ldots+s_\mu)-1} \gamma_l^{12\ldots\mu} \omega_{l+s_0}. \tag{16}$$

С другой стороны, в силу (8) и (7) имеем

$$\varepsilon^n = \varepsilon\omega_{(s_0+\ldots+s_\mu)-1} + \sum_{k=1}^{m} (r_k)^{n-1} \varepsilon e_k = \varepsilon\omega_{n-1} + \sum_{k=1}^{m} (r_k)^n e_k. \tag{17}$$

Сравнивая (16) и (17), получаем

$$\varepsilon^n = \varepsilon\omega_{n-1} + \sum_{k=1}^{m} (r_k)^n e_k, \tag{18}$$

где

$$\varepsilon\omega_{n-1} = -\sum_{l=0}^{n-(s_0+1)} \gamma_l^{12\ldots\mu} \omega_{l+s_0}. \tag{19}$$

Согласно (18) и (7)

$$\varepsilon^{n+1} = \varepsilon^2\omega_{n-1} + \sum_{k=1}^{m} (r_k)^{n+1} e_k,$$

где в силу (19) $\varepsilon^2\omega_{n-1} = \varepsilon(\varepsilon\omega_{n-1}) = [(\gamma_{n-s_0-1}^{1\ldots\mu})^2 - \gamma_{n-s_0-2}^{1\ldots\mu}]\,\omega_{n-1} + \sum_{l=0}^{n-s_0-3} [\gamma_{n-s_0-1}^{1\ldots\mu}\gamma_{l+1}^{1\ldots\mu} - \gamma_l^{1\ldots\mu}]\,\omega_{l+s_0+1} + \gamma_{n-s_0-1}^{1\ldots\mu}\gamma_0\omega_{s_0}$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.

$$\varepsilon^j = \omega_j + \sum_{k=1}^{m} (r_k)^j e_k, \quad j = 1, \ldots, n-1,$$

$$\varepsilon^{n+s} = \varepsilon(\varepsilon^s\omega_{n-1}) + \sum_{k=1}^{m} (r_k)^{n+s} e_k, \quad s = 0, 1, \ldots,$$

где ω_j, $j = 1, \ldots, n-1$, *имеют вид* (6), $\varepsilon\omega_{n-1}$ *определяется по формуле* (19), *где* $\gamma_l^{1\ldots\mu}$ *определяются по формулам* (13), (14) *и* (11), *а* $\varepsilon^s\omega_{n-1}$ *определяются последовательно согласно* (19) *и тому, что* $\varepsilon^s\omega_{l+s_0} = \omega_{l+s+s_0}$ *при всех* $s: l + s + s_0 \leqslant n-1$.

Правило умножения элементов ω_j, $j = 1, \ldots, n-1$, определяет такая лемма.

Лемма 2.

$$\omega_i\omega_j = \omega_j\omega_i = \begin{cases} \omega_{i+j} \text{ при } i, j = 1, \ldots, n-1; \quad i+j \leqslant n-1; \\ \varepsilon^s\omega_{n-1} \text{ при } i+j = (n-1)+s, \quad s = 1, \ldots, n-1, \end{cases}$$

где в силу (19) $\varepsilon^s\omega_{n-1}$ *однозначно разлагаются по элементам* $\omega_{s_0}, \omega_{s_0+1}, \ldots, \omega_{n-1}$.

В силу теоремы 1 и леммы 2 нетрудно доказывается следующая теорема.

Теорема 2.

$e_1, \ldots, e_{m+1}, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ — *базис алгебры* $\mathcal{A}$.

3. Обозначим через ${}^0\mathcal{A}$ и ${}^1\mathcal{A}$ подпространства C-линейного пространства $\mathcal{A}$, порожденные соответственно базисными элементами $e_1, \ldots, e_{m+1}$ и $\omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$ ($e_1, \ldots, e_{m+1}$ — ортогональные идемпотенты $\mathcal{A}$). Таким образом, $\mathcal{A} = {}^0\mathcal{A} \oplus {}^1\mathcal{A}$ — Z_2-градуированное линейное пространство с градуировкой $({}^0\mathcal{A}, {}^1\mathcal{A})$. Элементы пространств ${}^0\mathcal{A}$ и ${}^1\mathcal{A}$ называются [4] однородными соответственно четности

$$p(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a \in {}^0\mathcal{A}; \\ 1, & \text{если } a \in {}^1\mathcal{A}. \end{cases}$$

Согласно лемме 1 и тому, что $e_1 + e_2 + \ldots + e_{m+1} = 1_{\mathcal{A}} \in {}^0\mathcal{A}$, ${}^0\mathcal{A}$ — подалгебра алгебры $\mathcal{A}$, ясно, что ${}^0\mathcal{A} = e_1\mathcal{A} \oplus \ldots \oplus e_{m+1}\mathcal{A}$; ${}^1\mathcal{A}$ — подалгебра $\mathcal{A}$ без единицы. Следуя [5] назовем $\{e_i, \omega_j\}$, $i = 1, \ldots, m+1$; $j = 1, \ldots, n-1$, стандартным базисом пространства $\mathcal{A} \equiv \mathcal{A}^{m+1,n-1} = \mathcal{A}^{m+1,0} \times \mathcal{A}^{0,n-1}$.

Приведем некоторые приложения изложенных результатов.

1. Нахождение обратного элемента. Рассмотрим алгебру $\mathcal{A} = {}^0\mathcal{A} \oplus {}^1\mathcal{A}$ размерности $m+5$, определяемую соотношением (2) вида $f(\varepsilon) = \varepsilon^3(\varepsilon - a)^2 \times \prod_{k=1}^{m} (\varepsilon - r_k) = 0$. В стандартном базисе $\{e_k, \omega_j\}$, $k = 1, \ldots, m+1$; $j = 1, \ldots, 4$, для элемента

$$\alpha = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha^k e_k + \sum_{j=1}^{4} \alpha^{m+1+j}\omega_j$$

найдем элемент

$$\beta = \sum_{k=1}^{m+1} \beta^k e_k + \sum_{j=1}^{4} \beta^{m+1+j}\omega_j,$$

обратный к нему. Согласно лемме 1 имеем

$$\alpha\beta = \sum_{k=1}^{m+1} \alpha^k \beta^k e_k + \sum_{j=1}^{4} (\alpha^{m+1}\beta^{m+1+j} + \beta^{m+1}\alpha^{m+1+j})\,\omega_j + \\ + \sum_{i,j=1}^{4} \alpha^{m+1+i}\beta^{m+1+j}\omega_i\omega_j = 1_{\mathcal{A}} \equiv \sum_{k=1}^{m+1} e_k.$$

Отсюда из леммы 2 нетрудно получить линейную относительно β^k, $k=1, \ldots, \ldots, m+5$, систему, из которой элемент $\beta = \alpha^{-1} \in \mathcal{A}$ определяется.

2. Задача Коши. Рассмотрим задачу $dx/dt = Ax$, $x(0) = x_0$, где $A = \sum_{k=1}^{m+1} a^k e_k + \sum_{j=1}^{n-1} a^{m+1+j}\,\omega_j$ — постоянный элемент алгебры $\mathcal{A} = {}^0\mathcal{A} \oplus {}^1\mathcal{A}$, $\|A\| = \sum_{k=1}^{m+n} |a^k|$. В стандартном базисе можно найти структуру решения $x = \exp(tA)\,x_0$ этой задачи. Имеем

$$\exp(A) = \prod_{k=1}^{m+1} \exp(a^k e_k) \prod_{j=1}^{n-1} \exp(a^{m+1+j}\omega_j). \tag{20}$$

Здесь первый сомножитель в силу леммы 1 вычисляется легко, второй требует громоздких вычислений (см. лемму 2). Поскольку

$$\exp(a^k e_k) = 1_{\mathcal{A}} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\,(a^k e_k)^i = \sum_{j=1}^{m+1} e_j + e_k \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!}\,(a^k)^i,$$

имеем $\prod_{k=1}^{m+1} \exp(a^k e_k) = \sum_{k=1}^{m+1} \exp(a^k)\,e_k$. Отсюда и (20)

$$\exp(A) = \sum_{k=1}^{m+1} \exp(a^k)\,e_k \prod_{j=1}^{n-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!}\,(a^{m+1+j}\omega_j)^i.$$

3. Моногенность. В конечной области $\mathcal{D}$ комплексной плоскости $z = x + iy$ рассмотрим уравнение

$$\frac{\partial p}{\partial z}\,\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} - \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}\,\frac{\partial w}{\partial z} = Bw + F, \tag{21}$$

где B, F, $p, w : \mathcal{D} \to \mathcal{A} = {}^0\mathcal{A} \oplus {}^1\mathcal{A}$. Функции B, F непрерывны, p, w — класса C^1. Однородное уравнение уравнения (21) выражает условие моногенности функции w по функции p в области $\mathcal{D}$ в смысле В. С. Федорова [6]. Если p, w комплексные и $\left|\left(\frac{\partial p}{\partial z}\right)^{-1} \frac{\partial p}{\partial \bar{z}}\right| \leqslant q < 1$, имеем уравнение Бельтрами. Здесь же элемент $(\partial p/\partial z)^{-1}$, обратный к элементу $\partial p/\partial z$, вообще не обязан существовать. В [6] найдено общее решение уравнения (21), интегральное представление моногенной по p в $\mathcal{D}$ функции (при определенных условиях на функцию p), интегральное представление решений. Стандартн ый базис $\{e\,, \omega_j\}$, $k = 1, \ldots, m+1$; $j = 1, \ldots, n-1$, позволяет выяснить структуру моногенной функции, структуру решения уравнения (21).

1. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Эллиптические и автоморфные функции. Функции Ламе и Матье.— М. : Наука, 1967.— 300 с.
2. *Кусковский Л. Н.* Об одной дифференциальной системе // Изв. вузов. Математика.— 1984.— № 2.— С. 87.
3. *Вишневский В. В.* Полиномиальные алгебры и аффинорные структуры // Тр. сем. кафедры геометрии, вып. VI.— Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1971.— С. 22—35.
4. *Владимиров В. С., Волович И. В.* Суперанализ. 1. Дифференциальное исчисление // Теорет. и мат. физика.— 1984.— **59**, № 1.— С. 3—27.
5. *Березин Ф. А.* Введение в алгебру и анализ с антикоммутирующими переменными.— М.: Изд-во Моск. ун-та, 1983.— 208 с.
6. *Кусковский Л. Н.* Обобщенные ареолярные производные и их приложения к дифференциальным уравнениям // Rev. roum. math. pures et appl.— 1986.—**31**, № 7.— С. 625—637

Иванов. текстил. ин-т

Получено 12.02.88