УДК 517.9

В. И. Ткаченко

Расщепляемость и спектр линейного дифференциального уравнения с квазипериодическими коэффициентами

Линейное дифференциальное уравнение с квазипериодическими коэффициентами при больших значениях спектрального параметра расщепляется на экспоненциально дихотомичную систему и двухмерную систему со свойствами одномерного уравнения Шредингера. Выделено множество значений параметра, при которых уравнение имеет решения вида $A(t)\exp(iat)$ с действительным числом a и квазипериодической функцией $A(t)$.

Лінійне диференціальне рівняння з квазіперіодичними коефіцієнтами при великих значеннях спектрального параметра розщеплюється на експоненціально дихотомічну систему і двовимірну систему з властивостями одновимірного рівняння Шредінгера. Виділена множина значень параметра, при яких рівняння має розв'язки вигляду $A(t)\exp(iat)$ з дійсним числом a і квазіперіодичною функцією $A(t)$.

Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида

$$(-1)^n y^{(2n)} + (q_1(t)\, y^{(n-1)})^{(n-1)} + \ldots + (q_{n-1}(t)\, y')' + q_n(t)\, y = Ey, \qquad (1)$$

где E — действительный параметр, функции $q_j(t)$, $j = \overline{1, n}$, квазипериодические с частотным базисом $\omega_1, \ldots, \omega_m$, т. е. функции $q_j(t)$ допускают представление $q_j(t) = p_j(t\omega_1, \ldots, t\omega_m)$, где $p_j(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$ — 2π-периодические функции φ_k, $k = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$.

Для одномерного уравнения Шредингера (уравнение (1) при $n = 1$) в работах [1—4] выделено множество значений спектрального параметра E, при которых уравнение имеет два линейно независимых решения вида $A(t)\exp(\pm iat)$ с действительной постоянной a и квазипериодической функцией $A(t)$. Показано, что это множество принадлежит непрерывному спектру оператора Шредингера, и получена асимптотика длин лакун в спектре при $E \to +\infty$. В данной работе доказано, что уравнение (1) при $n > 1$ и достаточно больших значениях E можно расщепить на экспоненциально дихотомичную систему и двухмерную систему со свойствами одномерного уравнения Шредингера. Это позволяет выделить значения параметра из непрерывного спектра, при которых уравнение (1) имеет два линейно независимых решения вида $A(t)\exp(\pm iat)$ и оценить меру таких значений E при $E \to +\infty$.

Предполагаем, что функции $p_j(\varphi)$, $j = \overline{1, n}$, аналитические в полосе $|\mathrm{Im}\, \varphi_k| \leqslant \rho$, $k = \overline{1, m}$, и выполняется условие несоизмеримости частот $\left|\sum_{i=1}^{m} n_i \omega_i\right| \geqslant C|n|^{-m+1}$ с некоторой постоянной $C > 0$ для любых ненулевых целочисленных векторов $n = (n_1, \ldots, n_m)$, $|n| = \Sigma |n_i|$.

Выполним в уравнении (1) замену переменных

$$\begin{aligned}
&(-1)^n y = u_1, (-1)^n y' = u_2, \ldots, (-1)^n y^{(n)} = u_{n+1},\\
&(-1)^n (y^{(n)})' + q_1(t)\, y^{(n-1)} = u_{n+2},\\
&\quad\vdots\\
&(-1)^n (y^{(n)})^{(n-1)} + (q_1(t)\, y^{(n-1)})^{(n-2)} + \ldots + q_{n-1}(t)\, y' = u_{2n}.
\end{aligned}$$

Полученную систему уравнений запишем в виде

$$du/dt = (A + P(\varphi))\, u, \quad d\varphi/dt = \omega, \qquad (2)$$

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{2n} \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-1)^n E & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix},$$

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & p_1(\varphi) & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & p_{n-1}(\varphi) & \dots & 0 & \dots & 0 \\ p_n(\varphi) & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{2n}$ корни $2n$-й степени из $(-1)^n$. Занумеруем их так, чтобы $\varepsilon_{2n} = i$, $\varepsilon_{2n-1} = -i$, $\varepsilon_{2n-2} = 1$, $\varepsilon_{2n-3} = -1$, $\varepsilon_l = \bar{\varepsilon}_{2n-3-l}$, $l = \overline{1, 2n-4}$ при четном n и $\varepsilon_{2n} = i$, $\varepsilon_{2n-1} = -i$, $\varepsilon_l = \bar{\varepsilon}_{2n-1-l}$, $l = \overline{1, 2n-2}$ при нечетном n ($\bar{\varepsilon}_l$ комплексно сопряжено к ε_l). Пусть $E = \lambda^{2n}$. Выполняя в системе уравнений (2) замену переменных $u = U_1 x$ с матрицей

$$U_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ \lambda\varepsilon_1 & \lambda\varepsilon_2 & \dots & \lambda\varepsilon_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \lambda^{2n-1}\varepsilon_1^{2n-1} & \lambda^{2n-1}\varepsilon_2^{2n-1} & \dots & \lambda^{2n-1}\varepsilon_{2n}^{2n-1} \end{pmatrix},$$

получаем систему уравнений

$$dx/dt = (A_0 + P_0(\varphi))\,x, \quad d\varphi/dt = \omega, \tag{3}$$

где

$$A_0 = \operatorname{diag}(\lambda\varepsilon_1, \dots, \lambda\varepsilon_{2n}), \quad P_0(\varphi) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2n\lambda^{2n-2k+1}} P_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{n-k+1}}{2n\lambda^{2n-2k+1}} \begin{pmatrix} \varepsilon_1^k\varepsilon_1^{k-1} & \varepsilon_1^k\varepsilon_2^{k-1} & \dots & \varepsilon_1^k\varepsilon_{2n}^{k-1} \\ \varepsilon_2^k\varepsilon_1^{k-1} & \varepsilon_2^k\varepsilon_2^{k-1} & \dots & \varepsilon_2^k\varepsilon_{2n}^{k-1} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \varepsilon_{2n}^k\varepsilon_1^{k-1} & \varepsilon_{2n}^k\varepsilon_2^{k-1} & \dots & \varepsilon_{2n}^k\varepsilon_{2n}^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Обозначим $A_1 = \operatorname{diag}(\lambda\varepsilon_1, \dots, \lambda\varepsilon_{2n-2})$, $A_2 = \operatorname{diag}(\lambda\varepsilon_{2n-1}, \lambda\varepsilon_{2n})$. В соответствии с этим обозначением разобьем матрицу $P_0(\varphi)$ на блоки

$$P_0(\varphi) = \begin{pmatrix} P_{11}(\varphi) & P_{12}(\varphi) \\ P_{21}(\varphi) & P_{22}(\varphi) \end{pmatrix},$$

где $P_{11}(\varphi)$ — $(2n-2)\times(2n-2)$-, $P_{12}(\varphi)$ — $(2n-2)\times 2$-, $P_{21}(\varphi)$ — $2\times(2n-2)$-, $P_{22}(\varphi)$ — 2×2-мерные матрицы. Следуя [1], обозначим через G кольцо 2×2-мерных матриц вида $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix}$.

Теорема 1. *Для достаточно больших* λ *существует замена переменных*

$$x=\begin{pmatrix}E_{2n-2} & U(\varphi)\\ V(\varphi) & E_2\end{pmatrix}z, \tag{4}$$

(E_j — *единичная* j-*мерная матрица*) *с аналитическими при* $|\mathrm{Im}\,\varphi|\leqslant\rho$ *периодическими матрицами* $U(\varphi)$, $U(\varphi)$, *приводящая систему* (3) *к блочно-диагональному виду*

$$dz/dt=\mathrm{diag}\,(B_1(\varphi,\lambda),\quad B_2(\varphi,\lambda))\,z,\quad d\varphi/dt=\omega, \tag{5}$$

где $B_2(\varphi,\lambda)\in G$ *при* $\mathrm{Im}\,\varphi=0$.

Доказательство. Подставляя (4) в систему (3), получаем выражения для матриц $B_i:B_1(\varphi)=A_1+P_{11}(\varphi)+P_{12}(\varphi)V(\varphi)$, $B_2(\varphi)=A_2+P_{22}(\varphi)+P_{21}(\varphi)U(\varphi)$. Матрицы U, V определяются из уравнений

$$\left(\frac{\partial U}{\partial\varphi},\omega\right)+UA_2-A_1U=P_{12}+P_{11}U-UP_{22}-UP_{21}U, \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial\varphi},\omega\right)+VA_1-A_2V=P_{21}+P_{22}V-VP_{11}-VP_{12}V. \tag{7}$$

Решение уравнения (6) ищем методом итераций

$$\left(\frac{\partial U_{s+1}}{\partial\varphi},\omega\right)+U_{s+1}A_2-A_1U_{s+1}=P_{12}+P_{11}U_s-U_sP_{22}-U_sP_{21}U_s\equiv P_s, \tag{8}$$
$$U_0\equiv 0.$$

Разложим матрицы $P_s(\varphi)$, $U_{s+1}(\varphi)$ в ряды Фурье

$$U_{s+1}(\varphi)=\sum_N U_{s+1}^{(N)}e^{i(N,\varphi)},\quad P_s(\varphi)=\sum_N P_s^{(N)}e^{i(N,\varphi)},\quad N\in Z^m.$$

Подставляя эти разложения в уравнение (8), находим значения элементов матриц $U_{s+1}^{(N)}$:

$$(U_{s+1}^{(N)})_{jk}=\frac{(P_s^{(N)})_{jk}}{i(N,\omega)+\lambda\varepsilon_k-\lambda\varepsilon_j},\quad j=\overline{1,2n-2},\quad k=2n-1,2n. \tag{9}$$

Обозначим через H множество $(2n-2)\times 2$ матриц $Q(\varphi)$, ряды Фурье $Q(\varphi)=\sum_N Q^{(N)}e^{i(N,\varphi)}$ которых обладают свойствами:

при четном n: $\overline{q_{2n-3-j,k+1}^{(-N)}}=q_{jk}^{(N)}$ для $j=\overline{1,2n-4}$, $\overline{q_{j,k+1}^{(-N)}}=q_{jk}^{(N)}$ для $j=2n-3,\ 2n-2$;

при нечетном n: $q_{2n-1-j}^{(-N)}=\overline{q_{jk}^{(N)}}$, $j=\overline{1,2n-2}$, $k=2n-1,2n$, при $k=2n$ принимаем $q_{j,k+1}=q_{j,2n-1}$; $Q^{(N)}=\{q_{jk}^{(N)}\}$.

Доказательству теоремы предпошлем несколько лемм.

Лемма 1. *Если* $P_s(\varphi)\in H$, *то решение уравнения* (8) $U_{s+1}(\varphi)$ *принадлежит* H *при* $\mathrm{Im}\,\varphi=0$.

Доказательство. Пользуясь формулой (9) и выбором нумерации корней ε_j, получаем

$$U_{2n-3-j,k+1}^{(-N)}=\frac{P_{2n-3-j,k+1}^{(-N)}}{i(-N,\omega)+\lambda\varepsilon_{k+1}-\lambda\varepsilon_{2n-3-j}}=\frac{\overline{P_{jk}^{(N)}}}{\overline{i(N,\omega)+\lambda\varepsilon_k-\lambda\varepsilon_j}}=\overline{U_{jk}^{(N)}},$$
$$j=\overline{1,2n-4}.$$

$$U^{(-N)}_{j,k+1} = \frac{P^{(-N)}_{j,k+1}}{i(-N, \omega) + \lambda\varepsilon_{k+1} - \lambda\varepsilon_j} = \frac{\overline{P^{(N)}_{jk}}}{\overline{i(N, \omega) + \lambda\varepsilon_k - \lambda\varepsilon_j}} = \overline{U^{(N)}_{jk}},$$
$$j = 2n-3, \quad 2n-2.$$

Если n нечетно, в первом равенстве берем $U^{(-N)}_{2n-1-j,k+1}$, а второе не рассматриваем. В этих формулах $k = 2n-1, 2n$, для $k = 2n$ $(k+1)$ принимаем равным $2n-1$.

Лемма 2. *Если $U_s \in H$, то $P_{11}U_s \in H$, $U_sP_{22} \in H$, $U_sP_{21}U_s \in H$.*

Доказательство. Элементы матрицы P_{k11} имеют следующие разложения Фурье:

$$(P_{k11}(\varphi))_{jl} = \sum_N (P_{k11})^{(N)}_{jl} e^{i(N,\varphi)} = \sum_N \overset{(N)}{p}_{n-k+1} \varepsilon_j^k \varepsilon_l^{k-1} e^{i(N,\varphi)}.$$

Матрица $P_{11}U_s$ разлагается в ряд Фурье

$$P_{k11}U_s = \sum_N (P_{k11}U_s)^{(N)} e^{i(N,\varphi)} = \sum_N \sum_M (P_{k11})^{(M)} U_s^{(N-M)} e^{i(N,\varphi)},$$

или

$$(P_{k11}U_s)^{(N)}_{jr} = \sum_M \sum_{l=1}^{2n-2} (P_{k11})^{(M)}_{jl} (U_s)^{(N-M)}_{lr} = \sum_M \sum_{l=1}^{2n-2} p^{(M)}_{n-k+1} \varepsilon_j^k \varepsilon_l^{k-1} (U_s)^{(N-M)}_{lr}.$$

Тогда

$$(P_{k11}U_s)^{(-N)}_{2n-3-j,r+1} = \sum_M \Big(\sum_{l=1}^{2n-4} p^{(-M)}_{n-k+1} \varepsilon^k_{2n-3-j} \varepsilon^{k-1}_{2n-3-l} (U_s)^{(-N+M)}_{2n-3-l,r+1} +$$
$$+ \sum_{l=2n-3}^{2n-3} p^{(-M)}_{n-k+1} \varepsilon^k_{2n-3-j} \varepsilon_l^{k-1} (U_s)^{(-N+M)}_{l,r+1} \Big) = \sum_M \Big(\sum_{l=1}^{2n-4} \overline{p^{(M)}_{n-k+1}}\, \overline{\varepsilon_j^k}\, \overline{\varepsilon_l^{k-1}}\, \overline{(U_s)^{(N-M)}_{lr}} +$$
$$+ \sum_{l=2n-3}^{2n-2} \overline{p^{(M)}_{n-k+1}}\, \overline{\varepsilon_j^k}\, \overline{\varepsilon_l^{k-1}}\, \overline{(U_s)^{(N-M)}_{lr}} \Big) = \overline{(P_{k11}U_s)^{(N)}_{jr}}, \quad j = \overline{1, 2n-4},$$

$$(P_{k11}U_s)^{(-N)}_{j,r+1} = \sum_M \Big(\sum_{l=1}^{2n-4} p^{(-M)}_{n-k+1} \varepsilon_j^k \varepsilon^{k-1}_{2n-3-l} (U_s)^{(-N+M)}_{2n-3-l,r+1} +$$
$$+ \sum_{l=2n-3}^{2n-2} p^{(-M)}_{n-k+1} \varepsilon_j^k \varepsilon_l^{k-1} (U_s)^{(-N+M)}_{l,r+1} = \sum_M \Big(\sum_{l=1}^{2n-4} \overline{p^{(-M)}_{n-k+1}}\, \overline{\varepsilon_j^k}\, \overline{\varepsilon_l^{k-1}}\, \overline{(U_s)^{(N-M)}_{lr}} +$$
$$+ \sum_{l=2n-3}^{2n-2} \overline{p^{(M)}_{n-k+1}}\, \overline{\varepsilon_j^k \varepsilon_l^{k-1}}\, \overline{(U_s)^{(N-M)}_{lr}} = \overline{(P_{k11}U_s)^{(N)}_{jr}}, \quad j = 2n-3,\ 2n-2.$$

Выражения U_sP_{22} и $U_sP_{21}U_s$ рассматриваются аналогично.

Лемма 3. *Если $U \in H$, то 2×2-матрица $P_{21}U$ принадлежит множеству G.*

Доказательство. Матрица $P_{21}U$ имеет разложение Фурье

$$(P_{21}U)_{jr} = \sum_N (P_{21}U)^{(N)}_{jr} e^{i(N,\varphi)} = \sum_N \sum_M \sum_{l=1}^{2n-2} p^{(M)}_{n-k+1} \varepsilon_j^k \varepsilon_l^{k-1} U^{(N-M)}_{lr} e^{i(N,\varphi)},$$
$$j, r = 2n-1, 2n.$$

Тогда

$$(P_{21}U)_{j+1,r+1} = \sum_N \sum_M \Big(\sum_{l=1}^{2n-4} p^{(M)}_{n-k+1} \varepsilon^k_{j+1} \varepsilon^{k-1}_{2n-3-l} U^{(N-M)}_{2n-3-l,r+1} +$$
$$+ \sum_{l=2n-3}^{2n-2} p^{(M)}_{n-k+1} \varepsilon^k_{j+1} \varepsilon_l^{k-1} U^{(N-M)}_{l,r+1} \Big) e^{i(N,\varphi)} = \sum_N \sum_M \Big(\sum_{l=1}^{2n-4} \overline{p^{(-M)}_{n-k+1}}\, \overline{\varepsilon_j^k}\, \overline{\varepsilon_l^{k-1}}\, \overline{U^{(-N+M)}_{lr}} +$$
$$+ \sum_{l=2n-3}^{2n-2} \overline{p^{(-M)}_{n-k+1}}\, \overline{\varepsilon_j^k}\, \overline{\varepsilon_l^{k-1}} \overline{U^{(-N+M)}_{lr}} = \sum \overline{(P_{21}U)^{(-N)}_{jr}}\, e^{-i(N,\varphi)} = \overline{(P_{21}U)}_{jr}.$$

Здесь $j, r = 2n - 1, 2n$, как и раньше, при $j, r = 2n$ значения $\bar{j}+1, r+1$ принимаем равными $2n - 1$.

Лемма 4. *Существует такое $\lambda_0 > 0$, что при $\lambda \geqslant \lambda_0$ последовательность $\{U_s\}$ сходится равномерно к аналитическому решению уравнения* (6).

Доказательство. Для $j = \overline{1, 2n-2}$ $|\operatorname{Re}\varepsilon_j| \geqslant \sin \pi/n = \delta$. Для $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$ и $\varepsilon_k = \pm i$ имеем

$$|i(N, \omega) + \lambda\varepsilon_k - \lambda\varepsilon_j|^2 = ((N, \omega) \pm \lambda_1 - \lambda_2 \operatorname{Re}\varepsilon_j - \lambda_1 \operatorname{Im}\varepsilon_j)^2 + (\lambda_1 \operatorname{Re}\varepsilon_j - \lambda_2(\operatorname{Im}\varepsilon_j \mp 1))^2 \geqslant (\lambda_1 \operatorname{Re}\varepsilon_j - \lambda_2(\operatorname{Im}\varepsilon_j \mp 1))^2 \geqslant (\lambda_1\delta - |\lambda_2|)^2. \quad (10)$$

При действительных значениях λ

$$|i(N, \omega) + \lambda\varepsilon_k - \lambda\varepsilon_j|^2 \geqslant \lambda^2 (\operatorname{Re}\varepsilon_j)^2 \geqslant \lambda^2\delta^2.$$

Тогда при действительных λ из формулы (9) следует

$$|(U_{s+1}^{(M)})_{jk}| \leqslant \frac{|(P_s^{(N)})_{jk}|}{\delta\lambda}.$$

Если функция $U_s(\varphi)$ аналитическая при $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho$, то и функция $P_s(\varphi)$ аналитическая и ввиду неравенства (10) при достаточно больших λ будет аналитической и функция $U_{s+1}(\varphi)$.

С другой стороны, $U_{s+1}(\varphi)$ совпадает с единственным инвариантным тором системы

$$du/dt + UA_2 - A_1U = P_s, \quad d\varphi/dt = \omega. \quad (11)$$

Если рассматривать матрицу $u(\varphi)$ как $2(2n-2)$-мерный вектор $U^*(\varphi)$, то система (11) примет вид

$$dU^*/dt + BU^* = P_s^*(\varphi), \quad (12)$$

где $P_s^*(\varphi)$ — соответствующий вектор, составленный из элементов матрицы $P_s(\varphi)$, $B = \operatorname{diag}(\lambda(\varepsilon_1 + i), \ldots, \lambda(\varepsilon_{2n-2} + i), \lambda(\varepsilon_1 - i), \ldots, \lambda(\varepsilon_{2n-2} - i))$. По построению корни $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2n-2}$ имеют модули действительных частей не меньше δ. Поэтому система (12) экспоненциально дихотомична, она имеет функцию Грина $G(t, \tau)$ задачи об инвариантном торе, не зависящую от φ и удовлетворяющую оценке

$$\|G(t, \tau)\| \leqslant Ke^{-\lambda a|t-\tau|}, \quad (13)$$

где $K > 0$, $a > 0$. Инвариантный тор системы (12) можно представить в виде [5]

$$U_{s+1}^*(\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty} G(0, \tau) P_s^*(\omega\tau + \varphi)\, d\tau.$$

Матрицы $P_{ij}(\varphi)$, $i, \bar{j} = 1, 2$, пропорциональны $1/\lambda$. Используя вид матрицы $P_s(\varphi)$ (8) и оценку функции Грина (13), можно доказать равномерную сходимость последовательности $\{U_s^*(\varphi)\}$ к предельной функции $U^*(\varphi)$ при больших значениях λ, а значит, и сходимость последовательности $\{U_s(\varphi)\}$ к матрице $U(\varphi)$. Функция $U(\varphi)$ периодическая по φ и аналитическая как равномерный предел аналитических функций [6]. Заметим, что матрица $U(\varphi)$ пропорциональна λ^{-1}. Это обеспечит при больших λ обратимость матрицы в (4).

Доказательство теоремы. Из леммы 4 заключаем, что при $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho$ и $\lambda \geqslant \lambda_0$ существует единственное аналитическое решение уравнения (6), которое при $\operatorname{Im}\varphi = 0$ принадлежит множеству H. Из леммы 3 следует, что при $\operatorname{Im}\varphi = 0$ матрица $P_{21}U$ принадлежит кольцу G. A_2, $P_{22}(\varphi) \in G$, поэтому и $B_2(\varphi) \in G$. Рассуждения, аналогичные лемме 4, позволяют заключить, что уравнение (7) при $\lambda \geqslant \lambda_0$ имеет единственное аналитическое при $|\operatorname{Im}\varphi| \leqslant \rho$ периодическое решение. Тем самым теорема 1 доказана

Для резольвентных значений спектрального параметра λ оператора (1) система (3) экспоненциально дихотомична. При больших значениях λ уравнение $\dot{z}_1 = B_1(\varphi, \lambda) z_1$ в системе (5) экспоненциально дихотомично, причем с $(n-1)$-мерными устойчивым и неустойчивым многообразиями. Поэтому спектр оператора (1) характеризуется теми λ, при которых система

$$dz_2/dt = B_2(\varphi, \lambda) z_2, \quad d\varphi/dt = \omega \tag{14}$$

не экспоненциально дихотомична.

Теорема 2. *При достаточно большом λ_0 на полуоси $\lambda \geqslant \lambda_0 > 0$ существует множество W такое, что при $\lambda \in W$ система* (14) *периодической по φ и аналитической заменой переменных приводится к системе с постоянными коэффициентами $\dot{z} = \operatorname{diag}(ib, -ib)\, z$.*

Множество W принадлежит абсолютно непрерывному спектру оператора (1) *и мера его дополнения имеет оценку*

$$l([\lambda_0, \infty) \setminus W) \leqslant K_1 \exp\left(-\frac{K_2\lambda_0}{\ln^{1+\varepsilon}\lambda_0}\right) \tag{15}$$

с положительными постоянными K_1, K_2, ε.

Доказательство. Как следует из теоремы 1, при $\operatorname{Im}\varphi = 0$ $P_{21}U + P_{22} \in G$, поэтому уравнение (14) можно представить в виде

$$dz_2/dt = (A_2 + Q_2(\varphi) + aE_2) z_2, \quad d\varphi/dt = \omega,$$

где $Q_2(\varphi) \in G$ и $\int Q_2(\varphi)\, d\varphi = 0$, a — некоторое действительное число. Сделаем замену переменных $z_2 = e^{at}w_2$. Для системы

$$\dot{w}_2 = (A_2 + Q_2(\varphi))\, w_2, \quad \dot{\varphi} = \omega \tag{16}$$

аналогично [1] строим множество W значений λ, для которых система (16) аналитической заменой переменных приводится к виду $\dot{z} = \operatorname{diag}(ib, -ib)\, z$. Тогда система (14) при этой замене переменных принимает вид

$$\dot{z}_2 = \operatorname{diag}(ib + a, -ib + a)\, z_2, \quad \dot{\varphi} = \omega.$$

Т. е. для $\lambda \in W$ система (3) экспоненциально дихотомична с $(n+1)$- и $(n-1)$-мерными многообразиями. Но для близких к λ значений спектрального параметра λ' с $\operatorname{Im}\lambda' \neq 0$ система (3) экспоненциально дихотомична с n-мерными многообразиями и такая же размерность многообразий должна быть и при предельном значении λ'. Это противоречие показывает, что $a = 0$ и множество W принадлежит спектру системы (1).

Абсолютная непрерывность спектра на W и оценка (15) доказываются аналогично [1, 7]. Оценка не зависит от размерности уравнения (1).

Замечание. Если $p_j(\varphi) \in C^l(R^m)$, $l \geqslant 1$, то справедлива теорема 1 с периодическими матрицами $U(\varphi)$, $V(\varphi)$ класса $C^l(R^m)$. При $l \geqslant 2m + 2$ к системе (5) применимы результаты работы [2], позволяющие выделить значения λ, для которых система (14) приводима к виду $\dot{y} = \operatorname{diag}(ib, -ib)\, y$, и оценить меру таких λ.

1. *Динабург Е. И., Синай Я. Г.* Об одномерном уравнении Шредингера с квазипериодическим потенциалом // Функцион. анализ и его прил.— 1975.— 9, № 4.— С. 8—21.
2. *Парасюк И. О.* О зонах неустойчивости уравнения Шредингера с гладким квазипериодическим потенциалом // Укр. мат. журн.— 1978.— 30, № 1.— С. 70—78.
3. *Moser J., Pöschel J.* An extension of a result by Dynaburg and Sinai on quasi-periodic potentials // Comment. math. helv.— 1984.— 59, N 1.— P. 39—85.
4. *Russmann H.* On the one-dimensional Schrödinger equation with a quasi-periodic potential // Ann. N. Y. Acad. Sci.— 1980.— 357.— P. 90—107.
5. *Самойленко А. М.* Элементы математической теории многочастотных колебаний. Инвариантные торы.— М. : Наука, 1987.— 304 с.
6. *Шабат Б. В.* Введение в комплексный анализ: В 2-х т.— М. : Наука, 1976.— Т. 2.— 400 с.
7. *Chiercbia L.* Absolutely continuous spectra of quasiperiodic Schrödinger operators // J. Math. Phys.— 1987.— 28, N 12.— P. 2891—2898.

Ин-т математики АН УССР, Киев

Получено 17.01.90