УДК 517.5

В. В. ШАЛАЕВ, канд. физ.-мат. наук (Днепропетр. ун-т)

Точные оценки приближения непрерывных на сфере функций линейными операторами типа свертки

Для функций, непрерывных на многомерной сфере, получены точные оценки приближения их в равномерной метрике линейными операторами сферической свертки, действующими в подпространство сферических полиномов фиксированной степени. Эти оценки выражаются через модуль непрерывности функции, который определяется с помощью обобщенного сдвига этой функции.

Для функцій, неперервних на багатовимірній сфері, здобуті точні оцінки наближення їх у рівномірній метриці лінійними операторами сферичної згортки, які діють у підпросторі сферичних поліномів фіксованого ступеню. Ці оцінки виражаються через модуль неперервності функції, що визначається за допомогою узагальненого зсуву цієї функції.

Пусть $\sigma = \sigma_{m-1}$ — единичная сфера в m-мерном евклидовом пространстве R^m; μ, μ' — единичные векторы и (μ, μ') — их скалярное произведение. Через C_σ обозначим пространство непрерывных на σ функций f с нормой $\|f\| = \max\limits_{\mu\in\sigma} |f(\mu)|$.

Обобщенный сдвиг $T_h f$ функции $f \in C_\sigma$ вводится следующим образом:

$$T_h f(\mu) = \frac{1}{\Omega_{m-2} \sin^{m-2} h} \int\limits_{(\mu, \mu') = \cos h} f(\mu') \, dt(\mu'),$$

где Ω_{m-2} — «площадь» сферы σ_{m-2} и $dt(\mu')$ — элемент этой «площади».

Модуль непрерывности функции $f \in C_\sigma$ определим так:

$$\overline{\omega}(f; t) = \max_{|h_1 - h_2| \leqslant t} \| T_{h_1} f(\cdot) - T_{h_2} f(\cdot) \|.$$

Можно показать, что в отличие от обычно рассматриваемого модуля непрерывности

$$\omega(f; t) = \max_{0 \leqslant h \leqslant t} \| f(\cdot) - T_h f(\cdot) \|$$

модуль непрерывности, введенный выше, характеризуется теми же свойствами, что и классический модуль непрерывности функции, непрерывной на отрезке (см., например, [1, с. 176]).

Пусть $\mathcal{P}_N$ — множество сферических полиномов степени не выше N. Линейный оператор $U_N : C_\sigma \to \mathcal{P}_N$ определим равенством

$$U_N(f; \mu) = \int\limits_{\sigma_{m-1}} \varphi_N[(\mu, \mu')] f(\mu') \, dS(\mu'), \tag{1}$$

где $dS(\mu')$ — элемент поверхности сферы σ_{m-1},

$$\varphi_N(t) = \Omega_{m-1}^{-1} + \Sigma_{k=1}^{N} \alpha_h P_k^\lambda(t),$$

а $P_k^\lambda(t)$ — полиномы Гегенбауэра (см., например, [2, с. 169]) степень k, индекса $\lambda = (m-2)/2$.

Под $\| U_N \|$ будем понимать норму оператора $U_N : C_\sigma \to C_\sigma$. Легко проверить, что

$$\| U_N \| = \int\limits_{\sigma_{m-1}} | \varphi_N[(\mu, \mu')] | \, dS(\mu'). \tag{2}$$

Ясно также, что оператор U_N является компактным, поэтому с учетом результатов работы [3] для него справедливо равенство

$$\| J \pm U_N \| = 1 + \| U_N \|, \tag{3}$$

где J — единичный оператор.

Положим

$$F_N(t) = \begin{cases} \Omega_{m-2} \int\limits_{\pi}^{t} \varphi_N(\cos u) \sin^{m-2} u \, du, & 0 < t \leqslant \pi, \\ 0 & t = 0, \end{cases}$$

и через $\gamma(F_N)$ обозначим максимальное расстояние между соседними нулями функции $F_N(t)$.

Теорема. *Для любого оператора вида* (1) *имеет место равенство*

$$\sup_{\substack{f \in C_\sigma \\ f \neq \mathrm{const}}} \frac{\| f - U_N(f) \|}{\overline{\omega}(f; \gamma(F_N))} = \frac{1 + \| U_N \|}{2}.$$

Доказательство. Покажем сначала, что $F_N(+0) = -1$. Из определения функции $F_N(t)$ и ортогональности с весом $\sin^{m-2} u$ полиномов Гегенбауэра $P_k^{m/2-1}(\cos u)$ на $[0, \pi]$ следует

$$F_N(+0) = \Omega_{m-2} \int\limits_{\pi}^{0} \varphi_N(\cos u) \sin^{m-2} u \, du = -\Omega_{m-2} \int\limits_{0}^{\pi} \Omega_{m-1}^{-1} \sin^{m-2} u \, du = -1.$$

Теперь нетрудно получить следующее равенство:

$$|f(\mu)-U_N(f;\mu)|=\left|\int_0^\pi T_h f(\mu)\,dF_N(h)\right|. \tag{4}$$

Действительно, интегрируя по частям, имеем

$$\left|\int_0^\pi T_h f(\mu)\,dF_N(h)\right|=\left|-f(\mu)+\Omega_{m-2}\int_0^\pi T_h f(\mu)\,\varphi_N(\cos h)\sin^{m-2}h\,dh\right|=$$

$$=\left|-f(\mu)+\int_0^\pi dh\int_{(\mu,\mu')=\cos h} f(\mu')\,\varphi_N[(\mu,\mu')]\,dt(\mu')\right|=$$

$$=\left|-f(\mu)+\int_\sigma f(\mu')\,\varphi_N[(\mu,\mu')]\,dS(\mu')\right|.$$

Применяя к правой части равенства (4) теорему 1 [4], получаем, что для любого $\mu\in\sigma_{m-1}$

$$|f(\mu)-U_N(f;\mu)|\leqslant\frac{1}{2}\bigvee_0^\pi(F_N)\max_{|h_1-h_2|\leqslant\gamma(F_N)}|T_{h_1}f(\mu)-T_{h_2}f(\mu)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{2}\left[1+\int_0^\pi\Omega_{m-2}|\varphi_N(\cos t)|\sin^{m-2}t\,dt\right]\overline{\omega}(f;\gamma(F_N))=$$

$$=\frac{1}{2}\left[1+\int_\sigma|\varphi_N[(\mu,\mu')]|\,dS(\mu')\right]\overline{\omega}(f;\gamma(F_N)).$$

Тем самым с учетом (2) доказано неравенство

$$\sup_{\substack{f\in C_\sigma\\ f\neq\mathrm{const}}}\frac{\|f-U_N(f)\|}{\overline{\omega}(f;\gamma(F_N))}\leqslant\frac{1+\|U_N\|}{2}. \tag{5}$$

С другой стороны, так как $\overline{\omega}(f;\gamma)\leqslant 2\|f\|$, то с учетом соотношения (3) получаем в (5) неравенство противоположного знака, и теорема доказана.

Заметим, что операторы (1) являются операторами сферической свертки. Для 2π-периодических функций результаты, аналогичные доказанному, получены ранее в работах [4—9].

1. *Корнейчук Н. П.* Экстремальные задачи теории приближения.— М. : Наука, 1976.— 320 с.
2. *Стейн И., Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах.— М. : Мир, 1974.— 333 с.
3. *Chauveheid P.* On a property of compact operators in Banach spaces // Bull. dela Societe Royale des Sciences de Lienge.— 1982.— 51^e.— P. 371—378.
4. *Бабенко В. Ф., Шалаев В. В.* О неравенствах типа неравенств Джексона для линейных методов приближения функций // Докл. АН УССР. Сер. А.— 1980.— № 10.— С. 31—34.
5. *Стечкин С. Б.* О приближении непрерывных периодических функций суммами Фавара // Тр. Мат. ин-та АН СССР.— 1971.— 109.— С. 26—34.
6. *Гаврилюк В. Т.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Рогозинского и суммами Фурье // Вопросы теории приближений функций и ее приложения.— Киев : Ин-т математики АН УССР.— 1975.— С. 46—60.
7. *Гаврилюк В. Т.* Приближение непрерывных периодических функций тригонометрическими полиномами // Теория приближения функций.— М. : Наука, 1977.— С. 101—103.
8. *Гаврилюк В. Т., Стечкин С. Б.* Приближение непрерывных периодических функций суммами Фурье // Докл. АН СССР.— 1978.— 241, № 3.— С. 525—527.
9. *Шалаев В. В.* О точных оценках приближения периодических функций линейными полиномиальными методами типа свертки // Мат. заметки.— 1983.— 33, № 2.— С. 227—234.

Получено 23.01.90