

УДК 517.9

О. В. Борисенко, асп. (Ин-т математики АН Украины, Киев)

Малые случайные возмущения в колебательных системах второго порядка

Изучено предельное поведение решения нелинейного дифференциального уравнения, описывающего колебательную систему с малыми случайными возмущениями типа многомерного «белого» и «дробового» шумов.

Вивчена гранична поведінка розв'язку нелінійного диференціального рівняння, що описує коливальну систему з малими випадковими збуреннями по типу багатовимірного «білого» і «дробового» шумів.

© О. В. БОРИСЕНКО, 1992

Изучению колебательных систем под воздействием случайных возмущений посвящен ряд работ. Обширная библиография по данной теме приведена в [1].

В данной работе изучается предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ колебательной системы, описываемой уравнением

$$\begin{aligned} x''(t) + b^2 x(t) &= \varepsilon f_0(x(t), x'(t)) + \varepsilon^{1/2} f(x(t), x'(t)), \\ x(0) &= x_0, \quad x'(0) = y_0, \end{aligned} \quad (1)$$

где $f(x(t), x'(t))$ — обобщенная случайная функция такая, что для любого $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_0^t f(x(s), x'(s)) ds &= \sum_{i=1}^d \int_0^t f_i(x(s), x'(s)) d\omega_i(s) + \\ &+ \int_0^t \int_{R^2} f_{d+1}(x(s), x'(s), z) \tilde{v}(ds, dz), \end{aligned}$$

$f_i(x, y)$, $i = \overline{0, d}$, $f_{d+1}(x, y, z)$ — неслучайные функции; $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, d}$, — независимые одномерные винеровские процессы; $\tilde{v}(t, A)$ — центрированная пуассонова мера, независимая от $\omega_i(t)$, $i = \overline{1, d}$, $\tilde{v}(t, A) = v(t, A) - t\Pi(A)$, $Mv(t, A) = t\Pi(A)$; x_0, y_0 — неслучайные начальные данные, $\Pi(\cdot)$ — мера на борелевских множествах в R^2 .

Уравнение второго порядка (1) понимается как система стохастических уравнений без последдействия

$$dx(t) = y(t) dt,$$

$$\begin{aligned} dy(t) &= [-b^2 x(t) + \varepsilon f_0(x(t), y(t))] dt + \varepsilon^{1/2} \sum_{i=1}^d f_i(x(t), y(t)) d\omega_i(t) + \\ &+ \varepsilon^{1/2} \int_{R^2} f_{d+1}(x(t), y(t), z) \tilde{v}(dt, dz), \quad x(0) = x_0, \quad y(0) = y_0. \end{aligned} \quad (2)$$

Положим $x_\varepsilon(t) = x\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $y_\varepsilon(t) = y\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $\omega_i^\varepsilon(t) = \varepsilon^{1/2} \omega_i\left(\frac{t}{\varepsilon}\right)$, $i = \overline{1, d}$, $\tilde{v}_\varepsilon(t, A) = v\left(\frac{t}{\varepsilon}, A\right) - \frac{1}{\varepsilon} t\Pi(A)$. Проведя замену $t \rightarrow t/\varepsilon$ в (2), получим

$$dx_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon} y_\varepsilon(t) dt,$$

$$\begin{aligned} dy_\varepsilon(t) &= \left[-\frac{b^2}{\varepsilon} x_\varepsilon(t) + f_0(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) \right] dt + \sum_{i=1}^d f_i(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t)) d\omega_i^\varepsilon(t) + \\ &+ \varepsilon^{1/2} \int_{R^2} f_{d+1}(x_\varepsilon(t), y_\varepsilon(t), z) \tilde{v}_\varepsilon(dt, dz), \end{aligned} \quad (3)$$

$$x_\varepsilon(0) = x_0, \quad y_\varepsilon(0) = y_0.$$

В дальнейшем постоянные, независимые от ε , будем обозначать C .

Лемма. Пусть $\Pi(R^2) < \infty$ и выполняются условия:

1) f_i , $i = \overline{0, d+1}$, ограничены и удовлетворяют локальному условию Липшица по переменным (x, y) ;

2) существуют постоянные $K > 0$ и $r > 0$ такие, что для некоторого $\gamma > 0$

$$\sum_{i=0}^d |f_i(x, y)|^2 + |f_{d+1}(x, y, z)|^2 \leq K(x^2 + y^2)^{1+\gamma}, \quad x^2 + y^2 \leq r^2, \quad \forall z \in R^2.$$

Тогда для достаточно малых $\varepsilon > 0$ и $\delta > 0$

$$P\{x_\varepsilon^2(t) + y_\varepsilon^2(t) \leq \delta\} \leq Ct(\delta^{\nu/2} + \delta^\nu). \quad (4)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 1 из [2].

Пусть для функций f_i , $i = \overline{0, d+1}$, выполняется условие 2 леммы при $\nu > 1$. Тогда, используя (4), убеждаемся, что к случайным процессам

$$a_\varepsilon(t) = \sqrt{x_\varepsilon^2(t) + \frac{1}{b^2} y_\varepsilon^2(t)}, \quad \theta_\varepsilon(t) = -\frac{b}{\varepsilon} t - \operatorname{arctg} \frac{y_\varepsilon(t)}{bx_\varepsilon(t)}$$

можно применить обобщенную формулу Ито [3]. Для процесса $\xi_\varepsilon(t) = (a_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t))$ получим систему стохастических уравнений без последействия

$$d\xi_\varepsilon(t) = A_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t))dt + \sigma_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t))d\omega_\varepsilon(t) + \int_{R^2} C_\varepsilon(t, \xi_\varepsilon(t), z) \tilde{\nu}_\varepsilon(dt, dz), \quad \xi_\varepsilon(0) = (a_0, \theta_0), \quad (5)$$

где

$$\omega_\varepsilon(t) = \{\omega_i^\varepsilon(t), i = \overline{1, d}\}, \quad A_\varepsilon(t, a, \theta) = (A_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta), A_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta)),$$

$$\sigma_\varepsilon(t, a, \theta) = \{\sigma_{ij}^\varepsilon(t, a, \theta), i = 1, 2; j = \overline{1, d}\}, \quad C_\varepsilon(t, a, \theta, z) = (C_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta, z), C_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta, z)), \quad \psi_\varepsilon = \frac{tb}{\varepsilon} + \theta, \quad A_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta) =$$

$$= -\frac{\sin \psi_\varepsilon}{b} \tilde{f}_0(a, \psi_\varepsilon) + \frac{\cos^2 \psi_\varepsilon}{2ab^2} \sum_{i=1}^d \tilde{f}_i^2(a, \psi_\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon b} \int_{R^2} \{[(ab \sin \psi_\varepsilon - \varepsilon^{1/2} \tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z))^2 + a^2 b^2 \cos^2 \psi_\varepsilon]^{1/2} -$$

$$- ab + \varepsilon^{1/2} \sin \psi_\varepsilon \tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z)\} \Pi(dz),$$

$$A_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta) = -\frac{\cos \psi_\varepsilon}{ab} \tilde{f}_0(a, \psi_\varepsilon) - \frac{\sin 2\psi_\varepsilon}{2a^2 b^2} \sum_{i=1}^d \tilde{f}_i^2(a, \psi_\varepsilon) +$$

$$+ \frac{1}{\varepsilon} \int_{R^2} \left\{ \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \psi_\varepsilon - \varepsilon^{1/2} \frac{\tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z)}{ab \cos \psi_\varepsilon} \right] -$$

$$- \psi_\varepsilon - \varepsilon^{1/2} \frac{\cos \psi_\varepsilon}{ab} \tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z) \right\} \Pi(dz),$$

$$\sigma_{1j}^\varepsilon(t, a, \theta) = -\frac{\sin \psi_\varepsilon}{b} \tilde{f}_j(a, \psi_\varepsilon), \quad \sigma_{2j}^\varepsilon(t, a, \theta) = -\frac{\cos \psi_\varepsilon}{ab} \tilde{f}_j(a, \psi_\varepsilon),$$

$$j = \overline{1, d},$$

$$C_\varepsilon^{(1)}(t, a, \theta, z) = \frac{1}{b} \{[(ab \sin \psi_\varepsilon - \varepsilon^{1/2} \tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z))^2 + a^2 b^2 \cos^2 \psi_\varepsilon]^{1/2} - ab\},$$

$$C_\varepsilon^{(2)}(t, a, \theta, z) = \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \psi_\varepsilon - \frac{\varepsilon^{1/2} \tilde{f}_{d+1}(a, \psi_\varepsilon, z)}{ab \cos \psi_\varepsilon} \right] - \psi_\varepsilon,$$

$$\tilde{f}_i(a, \psi) = f_i(a \cos \psi, -ab \sin \psi), \quad i = \overline{0, d},$$

$$\tilde{f}_{d+1}(a, \psi, z) = f_{d+1}(a \cos \psi, -ab \sin \psi, z), \quad a_0 = \sqrt{x_0^2 + \frac{y_0^2}{b^2}},$$

$$\theta_0 = -\operatorname{arctg} \frac{y_0}{bx_0}.$$

Теорема. Пусть $\Pi(R^2) < \infty$, $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$, $t \in [0, t_0]$, функции f_i , $i = \overline{0, d+1}$, ограничены, f_0 — один раз, f_i , $i = \overline{1, d+1}$, — дважды непрерывно дифференцируемы по переменным (x, y) ,

$$\int_{R^2} [\|\nabla f_{d+1}\|^2 + \|\nabla^2 f_{d+1}\|^2] \Pi(dz) \leq C$$

и существует постоянная $r > 0$ такая, что для некоторого $\gamma > 1$

$$\sum_{i=0}^{d+1} |f_i|^2 \leq C(x^2 + y^2)^{1+\gamma}, \quad \sum_{i=0}^{d+1} \|\nabla f_i\|^2 \leq C(x^2 + y^2)^\gamma$$

при $x^2 + y^2 \leq r^2$ и любом $z \in R^2$. Здесь $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$, $\nabla^2 f$ — матрица вторых производных по (x, y) , $\|a\|^2 = \sum_{i=1}^n a_i^2$ для $a \in R^n$, $\|\sigma\|^2 =$

$$= \sum_{i,j=1}^n \sigma_{ij}^2 \text{ для матрицы } \sigma.$$

Тогда процесс $\xi_\varepsilon(t) = (a_\varepsilon(t), \theta_\varepsilon(t))$ слабо сходится при $\varepsilon \rightarrow 0$ к решению $\bar{\xi}(t) = (\bar{a}(t), \bar{\theta}(t))$ стохастического дифференциального уравнения

$$d\bar{\xi}(t) = \bar{A}(\bar{a}(t))dt + \bar{\sigma}(\bar{a}(t))d\bar{w}(t), \quad \bar{\xi}(0) = (a_0, \theta_0), \quad (6)$$

где

$$\bar{A}^{(1)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\tilde{f}_0(a, \psi) \frac{\sin \psi}{b} + \tilde{f}(a, \psi) \frac{\cos^2 \psi}{2b^2 a} \right] d\psi,$$

$$\bar{A}^{(2)}(a) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[-\tilde{f}_0(a, \psi) \frac{\cos \psi}{ab} - \tilde{f}(a, \psi) \frac{\sin 2\psi}{2a^2 b^2} \right] d\psi,$$

$$\bar{\sigma}(a) = \left\{ \frac{1}{2\pi b^2} \int_0^{2\pi} \tilde{f}(a, \psi) B(a, \psi) d\psi \right\}^{1/2},$$

$$\tilde{f}(a, \psi) = \sum_{i=1}^d \tilde{f}_i^2(a, \psi) + \int_{R^2} \tilde{f}_{d+1}^2(a, \psi, z) \Pi(dz),$$

$$B(a, \psi) = \begin{pmatrix} \sin^2 \psi & \frac{\sin 2\psi}{2a} \\ \frac{\sin 2\psi}{2a} & \frac{\cos^2 \psi}{a^2} \end{pmatrix}$$

$$\bar{w}(t) = (\bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t)),$$

$\bar{w}_i(t)$, $i = 1, 2$, — независимые одномерные винеровские процессы.

Доказательство. В условиях теоремы имеем

$$\|A_\varepsilon(t, a, \theta)\| + \|\sigma_\varepsilon(t, a, \theta)\| + \frac{1}{\varepsilon^{1/2}} \|C_\varepsilon(t, a, \theta, z)\| \leq C \quad (7)$$

и выполняются [4] условия теоремы существования и единственности решения системы (5). Процесс $\xi_\varepsilon(t)$ имеет вид

$$\xi_\varepsilon(t) = \xi_0 + \int_0^t A_\varepsilon(s, \xi_\varepsilon(s)) ds + \zeta_\varepsilon(t), \quad (8)$$

где

$$\zeta_\varepsilon(t) = \int_0^t \sigma_\varepsilon(s, \xi_\varepsilon(s)) d\omega_\varepsilon(s) + \int_0^t \int_{R^2} C_\varepsilon(s, \xi_\varepsilon(s), z) \tilde{v}_\varepsilon(ds, dz),$$

$$\xi_0 = (a_0, \theta_0).$$

Из непрерывности процессов $\bar{\xi}(t)$ и $\bar{\zeta}(t)$, леммы 2 [2] и соотношений (7), (8), (11) следует

$$\bar{\xi}(t) = \xi_0 + \int_0^t \bar{A}(\bar{a}(s)) ds + \bar{\zeta}(t),$$

где $\bar{\zeta}(t)$ — непрерывный квадратично интегрируемый векторный мартингал с матричной характеристикой

$$\langle \bar{\zeta}, \bar{\zeta} \rangle(t) = \int_0^t \bar{B}(\bar{a}(s)) ds.$$

Здесь $\bar{B}(a) = \{\bar{B}_{ij}(a), i, j = 1, 2\}$.

Из [6] следует, что существует винеровский процесс $\bar{w}(t) = (\bar{w}_1(t), \bar{w}_2(t))$ такой, что

$$\bar{\zeta}(t) = \int_0^t \bar{\sigma}(\bar{a}(s)) d\bar{w}(s),$$

где $\bar{\sigma}(a) = \bar{B}^{1/2}(a)$.

Значит, процесс $\bar{\xi}(t)$ удовлетворяет уравнению (6). Но уравнение (6) имеет единственное решение в условиях теоремы. Следовательно, процесс $\bar{\xi}(t)$ не зависит от выбора последовательности $\varepsilon_n \rightarrow 0$. Поэтому конечномерные распределения процесса $\xi_\varepsilon(t)$ сходятся к конечномерным распределениям процесса $\bar{\xi}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Процессы $\xi_\varepsilon(t)$ и $\bar{\xi}(t)$ — марковские процессы. Для слабой сходимости $\xi_\varepsilon(t) \rightarrow \bar{\xi}(t)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ достаточно [7] выполнения условия

$$\lim_{h \downarrow 0} \overline{\lim}_{\varepsilon \rightarrow 0} \sup_{\substack{x \in R^2 \\ 0 \leq s-t \leq h}} P\{\|\xi_\varepsilon(t, x, s) - x\| > \delta\} = 0 \quad (12)$$

для каждого $\delta > 0$, где $\xi_\varepsilon(t, x, s)$ — решение стохастического уравнения

$$\begin{aligned} \xi_\varepsilon(t, x, s) = x + \int_t^s A_\varepsilon(\tau, \xi_\varepsilon(t, x, \tau)) d\tau + \int_t^s \sigma_\varepsilon(\tau, \xi_\varepsilon(t, x, \tau)) d\omega_\varepsilon(\tau) + \\ + \int_t^s \int_{R^2} C_\varepsilon(\tau, \xi_\varepsilon(t, x, \tau), z) \tilde{\nu}_\varepsilon(d\tau, dz). \end{aligned}$$

Аналогично оценкам (9) получим

$$M \|\xi_\varepsilon(t, x, s) - x\| \leq C(|s-t| + |s-t|^{1/2}), \quad (13)$$

где C — постоянная, независимая от t, s, x и ε . Из неравенства Чебышева и (13) следует (12). Теорема доказана.

1. Митропольский Ю. А., Коломиец В. Г. О воздействии случайных сил на нелинейные колебательные системы // Мат. физика и нелинейн. механика.— 1986.— Вып. 5.— С. 23—34.
2. Борисенко О. В. Нелинейные колебания с малыми случайными возмущениями // Асимптотические методы в задачах мат. физики: Сб. научн. тр.— Киев: Ин-т математики АН УССР, 1989.— С. 19—27.
3. Гихман И. И., Скороход А. В. Стохастические дифференциальные уравнения.— Киев: Наук. думка, 1968.— 354 с.
4. Гихман И. И., Скороход А. В. Управляемые случайные процессы.— Киев: Наук. думка, 1977.— 252 с.
5. Скороход А. В. Исследования по теории случайных процессов.— Киев: Киев. ун-т, 1961.— 216 с.
6. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов: В 3-х т.— М.: Наука, 1975.— Т. 3.— 496 с.
7. Гихман И. И., Скороход А. В. Теория случайных процессов: В 3-х т.— М.: Наука, 1971.— Т. 1.— 664 с.