УДК 517.55

Л. И. Ронкин, д-р физ.-мат. наук
(Физ.-техн. ин-т низких температур АН Украины, Харьков)

ОЦЕНКА СНИЗУ ПЛОЩАДИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ КРИВОЙ В КУБЕ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{C}^n$

Получена точная оценка снизу площади аналитической кривой, лежащей в кубе пространства $\mathbb{C}^n$ и проходящей через его центр.

Одержана точна оцінка знизу площі аналітичної кривої, що розміщена у кубі простору $\mathbb{C}^n$ та проходить крізь його центр.

Оценка снизу масс замкнутого положительного потока в шаре, частным случаем которой является оценка снизу объема аналитического множества в шаре, составляет содержание классического результата П. Лелона (см., например, [1]). В трубчатой области пространства $\mathbb{C}^n$ оценка снизу объема аналитического множества рассматривалась в работах [2,3]. Случай гладкой выпуклой области в $\mathbb{C}^2$ рассмотрен в [4]. В [5] получена оценка снизу площади нулевого множества (с учетом кратности) функции, голоморфной в кубе пространства $\mathbb{C}^2$ и обращающейся в нуль в центре куба. Одним из существенных моментов доказательства этой оценки было использование полученного в той же работе утверждения о мере множества плоскостей, пересекающих кривую, расположенную на границе куба. При этом был рассмотрен только случай пространств $\mathbb{R}^4$ и $\mathbb{R}^3$. Недавно в [6] подобное утверждение было получено для пространства произвольной размерности[1]. Опираясь на него и используя соответствующим образом трансформированный метод работы [5], мы получим здесь оценку снизу площади аналитического множества чистой размерности 1 (аналитической кривой) в кубе пространства $\mathbb{C}^n$ для произвольного n.

Пусть $z = (z_1, \dots z_n) \in \mathbb{C}^n$. Обозначим $\|z\| = \max\{|\operatorname{Re} z_1|, |\operatorname{Im} z_1|, \dots, |\operatorname{Re} z_n|, |\operatorname{Im} z_n|\}$, $Q_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \|z\| < r\}$. Через $\dim_{z^0}\chi$, где χ — аналитическое множество в области $G \subset \mathbb{C}^n$, обозначим комплексную размерность χ в точке z^0. Если $\dim_{z^0}\chi$ не зависит от $z^0 \in \chi$, то множество χ называется множеством чистой размерности $\dim\chi = \dim_{z^0}\chi$. В случае $\dim\chi = 1$ через $V_2(\chi, G^0)$, где $G^0 \subset G$, обозначим площадь пересечения $\chi \cap G^0$.

Теорема. *Пусть χ — аналитическое множество в „кубе" Q_r, имеющее чистую размерность $\dim\chi = 1$ и содержащее точку $z = 0$. Тогда*

$$V_2(\chi, Q_r) \geq 4r^2 \tag{1}$$

Для доказательства этой теоремы понадобится следующая лемма.

Лемма. *Пусть G — область в G^n, содержащая точку $\{0\}$, а χ — аналитическое множество в G, удовлетворяющее условиям $\dim\chi = 1$, $\{0\} \in \chi$. Пусть, далее, G^0 — выпуклая область в G^n такая, что $G^0 \subset G$ и $\{0\} \in G^0$. Тогда любая проходящая через точку $\{0\}$ гиперплоскость L (т. е. $(2n-1)$-мерная плоскость в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$) имеет непустое пересечение с множеством $\partial G^0 \cap \chi$. Более того, множество $L \cap \partial G^0 \cap \chi$ содержит не менее двух точек.*

[1] Как заметил Д. Е. Папуш, одно из промежуточных утверждений, сделанных в [6] при доказательстве основного результата, а именно оценки $b(\Gamma_n) \leq 2^{n-2}$, справедливо лишь при некотором дополнительном требовании в определении величины $b(\Gamma_n)$. Соответствующее изменение в определении этой величины не влечет, однако, ни изменения формулировок теорем в [6], ни сколь-нибудь существенного изменения их доказательств.

Доказательство. Заметим, прежде всего, что каждая гиперплоскость L может быть задана равенством $L = \{z \in \mathbb{C}^n\colon \operatorname{Re}\langle z, a\rangle = 0\}$ и, значит, не нарушая общности, можно считать, что $L = \{z \in \mathbb{C}^n\colon \operatorname{Re} z_1 = 0\}$. Очевидно также, что, не теряя общности, можно предполагать множество χ неприводимым.

Обозначим через π оператор проектирования из $\mathbb{C}^n_{(z)}$ в $\mathbb{C}_{(z_1)}$. Таким образом, $\pi z = z_1$. Возможны следующие случаи:

1) $\pi\chi = \{0\}$; в этом случае $\chi \subset \pi^{-1}(\{0\})$ и, стало быть, пересечение $L \cap \cap \chi \cap \partial G^0 = \chi \cap \partial(G^0 \cap \pi^{-1}(\{0\}))$ имеет мощность континуум.

2) $\pi\chi \neq \{0\}$; в этом случае, как известно (см., например, [7 с.131]), пересечение $\tilde{\chi} = \chi \cap \pi^{-1}(\{0\})$ является аналитическим множеством размерности $\dim\tilde{\chi} = \dim\chi - 1 = 0$. Следовательно, точка $\{0\}$ является изолированной точкой множества χ. Отсюда, согласно теореме Реммерта[7, с.101] вытекает существование такого поликруга Δ с центром в точке $\{0\}$, что $\pi(\Delta \cap \chi)$ — аналитическое множество в $\pi\Delta$. В рассматриваемой ситуации это означает, что множество $\pi(\Delta \cap \chi)$ либо дискретно, либо совпадает с $\pi\Delta$. Но дискретным оно быть не может, поскольку множество χ неприводимо и $\pi\chi \neq \{0\}$. Следовательно, $\pi(\chi \cap \Delta) = \pi\Delta$, откуда, в свою очередь, следует, что множество $\pi(\chi \cap G^0)$ содержит некоторую окрестность нуля. Аналогично, если $z^0 \in \chi \cap \cap G^0$, то $\pi(\chi \cap G^0)$ содержит некоторую окрестность точки πz^0. Таким образом, множество $\pi(G^0 \cap \chi)$ — открытое и, значит, открытым на $\mathbb{R}$ будет множество

$$A_1 = \pi(L \cap G^0 \cap \chi) = \pi(G^0 \cap \chi) \cap \{z_1\colon \operatorname{Re} z_1 = 0\}.$$

Отметим, что $A_1 \neq \varnothing$.

Рассмотрим теперь множество $A_2 = \pi(\chi \cap \overline{G^0}) \cap \{z_1\colon \operatorname{Re} z_1 = 0\}$. Оно замкнутое и $A_1 \subset A_2$. Следовательно, множество $A_2 \setminus A_1$ непусто и содержит не менее двух точек. Пусть $y_1^0 \in A_2 \setminus A_1$. Поскольку $y_1^0 \notin A_1$, то

$$\pi^{-1}(i\, y_1^0) \cap G^0 \cap \chi = \varnothing. \tag{2}$$

В то же время, так как $y_1^0 \in A_2$, то

$$\pi^{-1}(i\, y_1^0) \cap \overline{G^0} \cap \chi \neq \varnothing, \tag{3}$$

т. е. существуют $z_1^0 \in \mathbb{C}, \ldots, z_n^0 \in \mathbb{C}$ такие, что $(iy_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0) \in \overline{G^0} \cap \chi$. Из (2) и (3) заключаем, что $(iy_1^0, z_2^0, \ldots, z_n^0) \in \partial\overline{G^0} \cap \chi$. Таких точек y_1^0, как отмечалось, не менее двух. Следовательно, множество $L \cap \partial G^0 \cap \chi$ непусто и содержит не менее двух точек. Лемма доказана.

Перейдем к доказательству теоремы. Обозначим через $\mathcal{P}$ множество всех гиперплоскостей в $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, проходящих через начало координат. Каждой гиперплоскости L сопоставим множество $\alpha(L)$, являющееся пересечением „куба" Q_1 с прямой $l(L)$, ортогональной L и проходящей через точку $\{0\}$. Соответственно, множеству $E \subset \mathcal{P}$ сопоставим множество $\alpha(E) = \bigcup_{L \in \mathcal{P}} \alpha(L)$.

Меру $\mu(E)$ множества E определим равенством $\mu(E) = \operatorname{mes}_{2n} \alpha(E)$, где $\operatorname{mes}_{2n}\{:\}$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^{2n}$. Евклидов элемент длины спрямляемой кривой $S \subset \mathbb{R}^{2n}$ будем обозначать через dS. Элемент площади аналитического множества χ из условия доказываемой теоремы обозначим через dV_2. Так как множество всех иррегулярных точек множества χ не более чем счетно, то для всех $t \in (0, r)$ за исключением, быть может, счетного множества, пересечение $\Gamma_t = \chi \cap \partial Q_t$ состоит из конечного числа замкнутых спрямляемых кривых, имеющих гладкое пересечение с любой $(2n-1)$-мерной гранью "куба" Q_t. Более того, в окрестности каждой точки $z_0 \in \Gamma_t$, где $t \in (0, r) \setminus E$, а E — некоторое не более чем счетное множество, при любом $j = 1, \ldots, n$ множество χ, за исключением очевидного случая, когда оно лежит в одной из координатных плоскостей, может быть задано равенством $z_k = \varphi_{k,j}(z_j)$ с голоморфными функциями $\varphi_{k,j}$. Заметим, что в этой ситуации

$$dV_2 = \frac{i}{2}\sum_{k=1}^{n} dz_k \wedge d\bar{z}_k = \left(1 + \sum_{k:k \neq j}\left|\frac{\partial \varphi_{k,j}}{\partial z_j}\right|^2\right) dx_j \wedge dy_j, \tag{4}$$

и если S — кривая из пересечения $\Gamma_t \cap \{z: \operatorname{Re} z_j = t\}$, то

$$dS = \left(1 + \sum_{k:k \neq j}\left|\frac{\partial \varphi_{k,j}}{\partial z_j}\right|^2\right)^{1/2} dy_j. \tag{5}$$

Из (4) и (5) следует

$$V_2(\chi, Q_r) = \int_{\chi \cap Q_r} dV_2 \geq \int_0^r \left|\Gamma_t\right| dt, \tag{6}$$

где $\left|\Gamma_t\right|$ — суммарная длина кривых, составляющих Γ_t.

Воспользуемся теперь упомянутой ранее теоремой из [6]. Согласно этой теореме, если Γ — объединение конечного числа замкнутых кривых на ∂Q_1, то для меры множества $D_\Gamma = \{L \in \mathcal{P}: L \cap \Gamma \neq \emptyset\}$ справедлива оценка $|\Gamma| \geq 2^{-2n+3}\mu(D_\Gamma)$. Из этой оценки в рассматриваемом случае следует

$$\left|\Gamma_t\right| \geq t\, 2^{-2n+3}\mu(D_\Gamma). \tag{7}$$

По доказанной выше лемме $D_{\Gamma_t} = \mathcal{P}$ $\forall t \in (0, r)$, и значит, $\mu(D_\Gamma) = \operatorname{mes}_{2n} Q_1 = 2^{2n}$ $\forall t \in (0, r)$. Отсюда с учетом (6) и (7) следует

$$V_2(\chi, Q_r) \geq \int_0^r t 2^{-2n+3} 2^{2n}\, dt = 4r^2.$$

Теорема доказана.

В заключение заметим, что, как и в случае шара, представляется вполне естественной задача получения подобных оценок снизу для объемов аналитических множеств произвольной размерности, и, более того, для масс замкнутых положительных потоков степени (q, q).

1. *Лелон П., Грумен Л.* Целые функции многих комплексных переменных.– М.: Мир, 1989.– 350с.
2. *Aleksander H., Osserman R.* Area bounds for various classes of surfaces // Amer. J. Math. – 1975. – **97**. – P. 753 – 769.
3. *Korevaar J., Wiegerinck J., Zeinstra R.* Minimal area of zero sets in tube domains of $\mathbb{C}$ // Proc. Kon. Ned. akad. van wetensch. A. – 1984. – **87**. – P. 283 – 290.
4. *Zeinstra R.* On a question concerning zero sets of minimal area in domains of $\mathbb{C}$ // Ibid.–P. 291–297.
5. *Кацнельсон Б. З., Ронкин Л. И.* О минимальном объеме аналитического множества // Сиб. мат. журн. – 1974. – **15**, №3. – С. 516 – 528.
6. *Микитюк Я. В.* Об одной задаче интегральной геометрии // Теория функций, функцион. анализ и их прил. – 1990. – Вып. 53. – С. 95 – 99.
7. *Эрве М.* Функции многих комплексных переменных (локальная теория).– М.: Мир, 1965.– 165с.

Получено 21. 02. 91