УДК 519.85

О. О. Ємець, А. А. Роскладка (Полтав. техн. ун-т)

ПРО ОЦІНКИ МІНІМУМІВ ЦІЛЬОВИХ ФУНКЦІЙ ПРИ ОПТИМІЗАЦІЇ НА СПОЛУЧЕННЯХ

We obtain new estimates of extremal values of strongly convex differentiable functions and more precise estimates of minimum on a set of combinations with repetitions.

На основі запропонованого підходу одержано нові оцінки екстремальних значень сильно опуклих диференційовних функцій та посилені оцінки мінімумів на множині сполучень з повтореннями.

В останній час все більше уваги приділяється розробці та удосконаленню різних методів пошуку екстремальних розв'язків задач комбінаторного типу. Для побудови алгоритмів комбінаторної оптимізації (наприклад, при використанні методу віток і меж) необхідно оцінювати мінімуми, а для посилення ефективності цих алгоритмів велике значення має наявність достатніх умов мінімуму цільових функцій.

Деяким аспектам цих актуальних проблем для задач евклідової комбінаторної оптимізації на множині сполучень з повтореннями присвячена ця робота.

Введемо необхідні означення. Нехай J_n— множина n перших натуральних чисел, тобто

$$J_n = \{1, \ldots, n\}, \quad J_n^0 = J_n \cup \{0\}, \quad J_0 = \varnothing.$$

Під мультимножиною $G = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$, як і в [1], будемо розуміти сукупність елементів, серед яких можуть бути і однакові (нерозрізнимі). Будь-яку мультимножину A можна зобразити її основою $S(A)$, тобто множиною всіх її різних елементів, і кратністю — числом повторень кожного елемента основи цієї мультимножини. Кратності елементів мультимножини записують, як правило, у вигляді показника степеня. Список кратностей мультимножини називають її первинною специфікацією і позначають через $[A]$. Наприклад, мультимножина $A = \{a, a, a, b, b, c\}$ має основу $S(A) = \{a, b, c\}$, а її первинна специфікація $[A] = \{3, 2, 1\}$. Мультимножину A можна також задати як $A = \{a^3, b^2, c^1\}$.

Назвемо k-елементну підмультимножину в мультимножині A k-вибіркою, тобто B — k-вибірка, якщо $B \subset A$, а кількість елементів в B дорівнює k.

В [2] наведено означення евклідової комбінаторної множини. Далі для евклідової комбінаторної множини буде використовуватись таке означення [3, с.10].

Означення. *Множину E, елементами якої є k-вибірки $\overline{e} = (\overline{e}_1, \ldots, \overline{e}_k)$, $\tilde{e} = (\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_k)$ з мультимножини G вигляду*

$$e = \{g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}\}, \text{ де } g_{i_j} \in G,\ i_j \neq i_t,\ \forall\, i_j,\ i_t \in J_\eta,\ \forall\, j,\ t \in J_k,$$

назвемо евклідовою комбінаторною множиною, якщо з умови $\exists\, j \in J_k$, $\overline{e}_j \neq \neq \tilde{e}_j$ випливає $\overline{e} \neq \tilde{e}$.

Розглянемо множину k-сполучень з повтореннями з n різних дійсних чисел, якщо $G = \{g_1, \ldots, g_\eta\}$, $S(G) = \{e_1, \ldots, e_n\}$, $[G] = \{k^n\}$, тобто мультимножина G містить по k екземплярів кожного з елементів e_i, $i \in J_\eta$, основи $S(G)$. Елементами множини k-сполучень з повтореннями $\overline{S}_n^k(G)$ є всі

k-вибірки з мультимножини G вигляду $e = \{g_{i_1}, g_{i_2}, \ldots, g_{i_k}\}$ при виконанні умови $g_{i_1} \leq g_{i_2} \leq \ldots \leq g_{i_k}$. З означення видно, що елементи множини $\overline{S}_n^k(G)$ повинні бути впорядковані за неспаданням.

Для посилення екстремальних оцінок використаємо дві леми з роботи [4].

Лема 1 [4]. *Якщо функція* $\psi(x)$ *сильно опукла з параметром* $\rho > 0$ *і диференційовна на опуклій замкненій множині* $X \supset E$, *то для будь-якого* $x \in \in X$

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i, \tag{1}$$

де константи g_{δ_i}, $i \in J_\eta$, *задовольняють умову* $g_{\delta_i} \in G$ $\forall i \in J_\eta$, $|g_{\delta_i}| \leq \leq |g_{\delta_{i+1}}|$ $\forall i \in J_{\eta-1}$.

Посилимо оцінку мінімуму, взявши максимум по $x \in X$ від правої частини нерівності (1):

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \max_{x \in X} \Bigg[\psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \\ + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i \Bigg].$$

Доданок, що не залежить від x, виносимо за знак максимуму:

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \max_{x \in X} \Bigg[\psi(x) - \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} x_i + \rho \sum_{i=1}^{k} x_i^2 + \\ + \min_{y \in E} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i} - 2\rho x_i \right) y_i \Bigg]. \tag{2}$$

Перетворимо останній доданок правої частини нерівності (2), перемноживши відповідні компоненти скалярного добутку:

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - (\nabla \psi(x), x) + \rho x^2 + \\ + \min_{y \in E} ((\nabla \psi(x), y) - (2\rho x, y))],$$

де $\nabla \psi(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial \psi(x)}{\partial x_i}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_k)$.

Застосувавши очевидну формулу

$$\min_p (a(p) - b(p)) \geq \min_p a(p) - \max_p b(p),$$

маємо

$$\min_{y \in E} \psi(y) \geq \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - (\nabla \psi(x), x) + \rho x^2 + \\ + \min_{y \in E} (\nabla \psi(x), y) - \max_{y \in E} (2\rho x, y)].$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Твердження 1. *Якщо функція* $\psi(x)$ *сильно опукла з параметром* $\rho > 0$ *і диференційовна на опуклій замкненій множині* $X \supset E$, *то*

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \rho \sum_{i=1}^{k} g_{\delta_i}^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - (\nabla\psi(x), x) + \rho x^2 + \\ + \min_{y \in E} (\nabla\psi(x), y) - \max_{y \in E} (2\rho x, y)].$$

Лема 2 [4]. *Якщо функція* $\psi(x)$ *сильно опукла з параметром* $\rho > 0$ *на опуклій замкненій множині* X, $X \supset E$, *і диференційовна на* X, *то для будь-якого* $x \in X$

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla\psi(x)\|^2 + \rho \|g^* - c\|^2,$$

де $g^* = \arg\min_{x \in E} \|x - c\|^2$ *при* $c = x - \nabla\psi(x)/(2\rho)$.

Взявши максимум по $x \in X$ від правої частини нерівності, одержимо

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \max_{x \in X} [\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla\psi(x)\|^2 + \rho \|g^* - c\|^2].$$

Винесемо з-під знака максимуму доданок, що не залежить від x:

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \rho \|g^* - c\|^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla\psi(x)\|^2].$$

Таким чином, доведено наступне твердження.

Твердження 2. *Якщо функція* $\psi(x)$ *сильно опукла з параметром* $\rho > 0$ *на опуклій замкненій множині* X, $X \supset E$, *і диференційовна на* x, *то*

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \rho \|g^* - c\|^2 + \max_{x \in X} [\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \|\nabla\psi(x)\|^2].$$

Наведені оцінки для евклідової комбінаторної множини E можна конкретизувати для евклідової комбінаторної множини сполучень з повтореннями $\overline{S}_n^k(G)$.

Твердження 3. *Якщо функція* $\psi(x)$ *сильно опукла з параметром* $\rho > 0$ *і диференційовна на опуклій замкненій множині* $X \subset R^k$, $\overline{S}_n^k(G) \subset X$, *то*

$$\min_{y \in E} \psi(y) \ge \rho k \tilde{g}^2 + \max_{x \in X} \Bigg[\psi(x) - (\nabla\psi(x), x) + \rho x^2 + \\ + e_1 \left(\sum_{i=1}^{s} \nabla\psi(x_i) - 2\rho x_i \right) + e_n \left(\sum_{i=s+1}^{k} (\nabla\psi(x_i) - 2\rho x_i) \right) \Bigg],$$

де константа $\tilde{g} = \min |g_i|$, $g_i \in G$, *константа* $s \in J_k^0$ *визначається системою рівнянь*

$$\sum_{j=1}^{t} \left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s-j+1}} - 2\rho x_{s-j+1} \right) \ge 0 \quad \forall t \in J_s,$$

$$\sum_{j=1}^{t} \left(\frac{\partial\psi(x)}{\partial x_{s-j+1}} - 2\rho x_{s-j+1} \right) \le 0 \quad \forall t \in J_{k-s},$$

e_1, e_n — *відповідно найменший та найбільший елементи основи мультимножини* G.

Твердження 4. *Якщо функція* $\psi(x)$ *сильно опукла з параметром* $\rho > 0$ *на опуклій замкненій множині* $X \in R^k$, $\overline{S}_n^k(G) \subset X$, *і диференційовна на* X, *то*

$$\min_{y \in \overline{S}_n^k(G)} \psi(y) \geq \rho \| g^* - c \|^2 + \max_{x \in X} \left[\psi(x) - \frac{1}{4\rho} \| \nabla \psi(x) \|^2 \right].$$

Розглянуті в даній роботі оцінки мінімуму посилюють аналогічні оцінки, що досліджуються в роботі [5], і дозволяють з більшою точністю оцінити екстремальні значення цільових функцій при їх використанні для розв'язку задач евклідової комбінаторної оптимізації.

1. *Стоян Ю. Г., Ємець О. О.* Теорія і методи евклідової комбінаторної оптимізації. – Київ: Ін-т систем. досліджень освіти, 1993. – 188 с.
2. *Стоян Ю. Г.* Некоторые свойства специальных комбинаторных множеств. – Харьков, 1980. – 22 с. – (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; 85).
3. *Ємець О. О.* Теорія і методи комбінаторної оптимізації на евклідових множинах в геометричному проектуванні: Автореф. дис. ... д-ра фіз.-мат. наук. – Київ,1997. – 42с.
4. *Емец О. А.* Об оптимизации выпуклых функций на евклидовом комбинаторном множестве полиперестановок // Журнал вычислит. математики и мат. физики. – 1994. – №6. – С. 855 – 869.
5. *Емец О. А.* Об экстремальных свойствах недифференцируемых выпуклых функций на евклидовом множестве сочетаний с повторениями // Укр. мат. журн. – 1994. – **46**, №6. – С. 680 – 691.

Одержано 07.10.97,
після доопрацювання – 06.05.98