УДК 519.21

Ю. Н. Линьков, Л. А. Габриель

(Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк)

# БОЛЬШИЕ УКЛОНЕНИЯ ПРИ БАЙЕСОВСКОМ РАЗЛИЧЕНИИ КОНЕЧНОГО ЧИСЛА ПРОСТЫХ ГИПОТЕЗ

We consider the problem of testing of a finite number of simple hypotheses in general scheme of statistical experiments. Under condition of the validity of theorems on large deviations for logarithm of likelihood ratio, we investigate the asymptotic behavior of probabilities of errors of the Bayes criterion. We obtain asymptotics of the Shannon information containing in an observation and in the Bayes criterion.

Розглянуто задачу розрізнення скінченної кількості простих гіпотез в загальній схемі статистичних експериментів. В умовах справедливості теорем про великі відхилення для логарифму відношення правдоподібності досліджено асимптотичну поведінку ймовірностей помилок байєсовського критерію. Одержано асимптотику кількості шеннонівської інформації, яка міститься у спостереженні та у байєсовському критерії.

**1. Введение.** Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ — основное вероятностное пространство, $(X^t, \mathfrak{B}^t, \{P_1^t, P_2^t, \ldots, P_N^t\})$, $t \in R_+$, — семейство статистических экспериментов, порождаемое наблюдениями произвольной природы $\xi^t$, зависящими от случайного параметра $\theta$ со значениями из конечного множества $\Theta = \{y_1, y_2, \ldots, y_N\}$, $2 \le N < \infty$, где $P_i^t(A) = \mathbf{P}\{\xi^t \in A / \theta = y_i\}$ для всех $A \in \mathfrak{B}^t$, $i = 1, 2, \ldots, N$ [1]. Рассмотрим задачу проверки гипотез $H_i = \{\theta = y_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, N$, по результатам наблюдения $\xi^t$.

Пусть $\pi = (\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_N)$, где $\pi_i = \mathbf{P}(H_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, — априорные вероятности гипотез, $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$, а $P^t = \sum_{i=1}^N \pi_i P_i^t$ — вероятностная мера, задающая безусловное распределение наблюдений $\xi^t$. Очевидно, $P_i^t \ll P^t$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$, и пусть $\mathfrak{z}_i^t(x) = dP_i^t / dP^t(x)$, $x \in X^t$, — производная Радона–Никодима меры $P_i^t$ относительно меры $P^t$. Для всех $\varepsilon \in R^1$ введем величину $H_{ij}^t(\varepsilon) = H(\varepsilon, P_i^t, P_j^t) = E^t(\mathfrak{z}_i^t)^\varepsilon(\mathfrak{z}_j^t)^{1-\varepsilon}$, называемую интегралом Хеллингера порядка $\varepsilon$ для мер $P_i^t$ и $P_j^t$ [1], где $E^t$ — математическое ожидание по мере $P^t$, $\mathfrak{z}_i^t = \mathfrak{z}_i^t(\xi^t)$. Кроме того, введем отношение правдоподобия $z_{ij}^t = \mathfrak{z}_i^t(x) / \mathfrak{z}_j^t(x)$ для всех $i \ne j$, считая $0/0 = 0$, и положим $\Lambda_{ij}^t(x) = \ln z_{ij}^t(x)$.

Для различения гипотез $H_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, по наблюдению $\xi^t$ введем байесовский критерий $\delta_t^\pi$, полагая $\delta_t^\pi(x) = y_i$, если $\Lambda_{ij}^t(x) \ge \ln(\pi_j / \pi_i)$ для всех $i \ne j$ [2]. Для краткости будем писать $\delta_t^\pi(\xi^t) = \delta_t^\pi$. Через $e_t^\pi = \mathbf{P}\{\delta_t^\pi \ne \theta\}$ будем обозначать вероятность ошибки принятия гипотез $H_i$, $i = 1, 2, \ldots, N$, с помощью байесовского критерия $\delta_t^\pi$.

В настоящей работе исследуем асимптотическое поведение при $t \to \infty$ вероятности ошибки $e_t^\pi$ байесовского критерия $\delta_t^\pi$ в условиях, когда справедливы теоремы о больших уклонениях для логарифмов отношения правдоподобия $\Lambda_{ij}^t$ для всех $i \ne j$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $\Lambda_{ij}^t = \Lambda_{ij}^t(\xi^t)$. Для конкретных наблюдений $\xi^t$ эта задача изучалась многими авторами (см., например, [3–5]). Отметим работу [6], в которой рассматривается общая модель наблюдений, но полагается $N = 2$ и в отличие от настоящей работы используется не метод больших уклонений, а свойства расстояния Реньи из работ [7, 8].

Поведение вероятности ошибки $e_t^\pi$ тесно связано с поведением количества шенноновской информации $I(\xi^t, \theta)$, содержащейся в наблюдении $\xi^t$ о параметре $\theta$, и количества информации $I(\delta_t^\pi, \theta)$, содержащейся в критерии $\delta_t^\pi$ о параметре $\theta$ [4, 5]. Из свойств количества информации имеем [9, 10]

$$I(\xi^t, \theta) = H(\theta) - \mathbf{E}H(\theta/\xi^t), \tag{1}$$

где

$$H(\theta) = -\sum_{i=1}^{N} \pi_i \ln \pi_i$$

— энтропия распределения параметра $\theta$, а

$$\mathbf{E}H(\theta/\xi^t) = \mathbf{E}\big(-\sum_{i=1}^{N} \pi_i(\xi^t) \ln \pi_i(\xi^t)\big)$$

— средняя условная энтропия распределения параметра $\theta$ при условии, что $\xi^t$ известно. Здесь $\pi_i(x) = \mathbf{P}\{\theta = y_i / \xi^t = x\}$ — апостериорное распределение параметра $\theta$, а $\mathbf{E}$ — математическое ожидание по мере $\mathbf{P}$. Аналогично из свойств количества информации имеем [9, 10]

$$I(\delta_t^\pi, \theta) = H(\theta) - \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi), \tag{2}$$

где

$$\mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) = \mathbf{E}\big(-\sum_{i=1}^{N} \tilde{\pi}_i(\delta_t^\pi) \ln \tilde{\pi}_i(\delta_t^\pi)\big)$$

— средняя условная энтропия распределения параметра $\theta$ при условии, что значение $\delta_t^\pi$ известно; $\tilde{\pi}_i(y) = \mathbf{P}\{\theta = y_i / \delta_t^\pi = y\}$, $y \in \Theta$. Заметим, что выполняется неравенство $I(\delta_t^\pi, \theta) \le I(\xi^t, \theta)$, и, значит, из равенств (1) и (2) получаем

$$\mathbf{E}H(\theta/\xi^t) \le \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi). \tag{3}$$

При достаточно слабых условиях $I(\xi^t, \theta) \to H(\theta)$ и $I(\delta_t^\pi, \theta) \to H(\theta)$ при $t \to \infty$ [1, 4, 5], и, значит, в силу равенств (1) и (2) $\mathbf{E}H(\theta/\xi^t) \to 0$ и $\mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) \to 0$ при $t \to \infty$. Исследованию скорости сходимости к нулю в этих соотношениях для конкретных схем наблюдений $\xi^t$ посвящены работы многих авторов (см., например, [4, 5]). В настоящей работе исследуем скорости стремления к нулю $\mathbf{E}H(\theta/\xi^t)$ и $\mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi)$ при $t \to \infty$ в общей схеме наблюдений $\xi^t$ в условиях, когда справедлива теорема о больших уклонениях для $\Lambda_{ij}^t$ при всех $i \ne j$.

**2. Асимптотика вероятностей ошибок байесовских критериев.** Для исследования вероятностей ошибок байесовского критерия $\delta_t^\pi$ введем следующие условия при $i \ne j$:

$\Lambda_{ij}$. Для любого $\varepsilon \in R^1$ существует предел

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln H_{ij}^t(\varepsilon) = \kappa_{ij}(\varepsilon),$$

где $\psi_t$ — некоторая положительная функция такая, что $\psi_t \to \infty$ при $t \to \infty$, а $\kappa_{ij}(\varepsilon)$ — собственная выпуклая функция, дифференцируемая на $(\varepsilon_{ij}^-, \varepsilon_{ij}^+)$, где

$$\varepsilon_{ij}^- = \inf\{\varepsilon : \kappa_{ij}(\varepsilon) < \infty\}, \qquad \varepsilon_{ij}^+ = \sup\{\varepsilon : \kappa_{ij}(\varepsilon) < \infty\},$$

и такая, что

$$\gamma_{ij}^- = \lim_{\varepsilon \downarrow \varepsilon_{ij}^-} \kappa_{ij}'(\varepsilon) < \gamma_{ij}^+ = \lim_{\varepsilon \uparrow \varepsilon_{ij}^+} \kappa_{ij}'(\varepsilon).$$

Очевидно, $\varepsilon_{ij}^- \le 0$ и $\varepsilon_{ij}^+ \ge 1$. Если в условии $\Lambda_{ij}$ выполняется строгое неравенство $\varepsilon_{ij}^- < 0$, то определена производная $\kappa_{ij}'(0) = \gamma_{ij}^0$, а в случае $\varepsilon_{ij}^+ > 1$ — производная $\kappa_{ij}'(1) = \gamma_{ij}^1$. Введем величины

$$\Gamma_{ij}^0 = \gamma_{ij}^0 I(\varepsilon_{ij}^- < 0) + \gamma_{ij}^- I(\varepsilon_{ij}^- = 0),$$

$$\Gamma_{ij}^1 = \gamma_{ij}^1 I(\varepsilon_{ij}^+ > 1) + \gamma_{ij}^+ I(\varepsilon_{ij}^+ = 1).$$

Ниже нам потребуется следующая теорема о больших уклонениях для логарифма отношения правдоподобия $\Lambda_{ij}^t$ при $t \to \infty$.

**Теорема 1.** *Если выполняется условие* $\Lambda_{ij}$ *с* $\Gamma_{ij}^0 < \gamma_{ij}^+$, *то для любого* $\gamma \in (\Gamma_{ij}^0, \gamma_{ij}^+)$

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P_j^t(\psi_t^{-1}\Lambda_{ij}^t > \gamma) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P_j^t(\psi_t^{-1}\Lambda_{ij}^t \ge \gamma) = -I_{ij}(\gamma),$$

*где* $I_{ij}(\gamma) = \sup_{\varepsilon \in R^1}(\varepsilon\gamma - \kappa_{ij}(\varepsilon))$ *— преобразование Лежандра–Фенхеля функции* $\kappa_{ij}(\varepsilon)$.

Доказательство теоремы 1 можно найти в работе [11].

*Замечание* 1. Нетрудно заметить, что $H_{ij}^t(\varepsilon) = H_{ij}^t(1-\varepsilon)$ при $i \ne j$. Поэтому при выполнении условия $\Lambda_{ij}$ также выполняется и условие $\Lambda_{ji}$, причем $\kappa_{ji}(\varepsilon) = \kappa_{ij}(1-\varepsilon)$. Отсюда легко вывести, что $I_{ji}(\gamma) = I_{ji}(-\gamma) + \gamma$. Для этого достаточно применить рассуждения из доказательства теоремы 1 в работе [12] или рассуждения при выводе следствия 2 из работы [13], где необходимо положить $P^t = P_j^t$, $\tilde{P}^t = P_i^t$, $\Lambda_t = \Lambda_{ij}^t$, $\kappa(\varepsilon) = \kappa_{ij}(\varepsilon)$, $\tilde{\kappa}(\varepsilon) = \kappa_{ji}(\varepsilon)$, $I(\gamma) = I_{ij}(\gamma)$, $\tilde{I}(\gamma) = I_{ji}(\gamma)$.

Следующая теорема описывает поведение вероятности ошибки $e_t^\pi$ байесовского критерия $\delta_t^\pi$ при $t \to \infty$ в случае выполнения условий $\Lambda_{ij}$.

**Теорема 2.** *Пусть выполняются условия* $\Lambda_{ij}$ *с* $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$ *при всех* $i \ne j$, $i, j = 1, 2, \ldots, N$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln e_t^\pi = -\min_{i \ne j} I_{ij}(0). \tag{4}$$

***Доказательство.*** Очевидно, справедливо равенство

$$e_t^\pi = \mathbf{P}(\delta_t^\pi \ne \theta) = \sum_{i=1}^N \pi_i P_i^t(\delta_t^\pi \ne y_i) = \sum_{i=1}^N \pi_i P_i^t\left(\bigcup_{j \ne i}\left\{\Lambda_{ji}^t \ge \ln\frac{\pi_i}{\pi_j}\right\}\right). \tag{5}$$

Отсюда получаем следующую оценку сверху:

$$e_t^\pi \le \sum_{i=1}^N \pi_i \sum_{j \ne i} P_i^t\left(\Lambda_{ji}^t \ge \ln\frac{\pi_i}{\pi_j}\right). \tag{6}$$

Так как $\psi_t^{-1}\ln(\pi_i/\pi_j) \to 0$ при $t \to \infty$ и $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$, то в силу теоремы 1

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln P_i^t \left( \Lambda_{ji}^t \geq \ln \frac{\pi_i}{\pi_j} \right) = -I_{ji}(0). \tag{7}$$

Учитывая, что условие $\Lambda_{ij}$ с $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$ выполняется при всех $i \neq j$, из (7) следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $t_0 = t_0(\varepsilon)$, одно для всех $i \neq j$, такое, что при всех $i \neq j$ для $t > t_0$ справедлива оценка

$$P_i^t \left( \Lambda_{ji}^t \geq \ln \frac{\pi_i}{\pi_j} \right) \leq \exp((-I_{ji}(0) + \varepsilon)\psi_t). \tag{8}$$

Таким образом, из (6) и (8) при $t > t_0$ получаем оценку

$$e_t^\pi \leq \sum_{i=1}^N \pi_i \sum_{j\neq i} \exp((-I_{ji}(0) + \varepsilon)\psi_t) \leq (N-1)\exp((-\min_{i\neq j} I_{ji}(0) + \varepsilon)\psi_t).$$

Отсюда, учитывая произвольность $\varepsilon$, получаем

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln e_t^\pi \leq -\min_{i\neq j} I_{ij}(0). \tag{9}$$

Очевидно, существует пара чисел $i'$ и $j'$, $j' \neq i'$, такая, что $I_{j'i'}(0) = \min_{i\neq j} I_{ji}(0)$. Тогда из равенства (5) получаем оценку снизу

$$e_t^\pi \geq \pi_{i'} P_{i'}^t(\Lambda_{j'i'}^t \geq \ln(\pi_{i'}/\pi_{j'})).$$

Учитывая соотношение (7), отсюда получаем

$$\liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln e_t^\pi \geq -\min_{i\neq j} I_{ji}(0). \tag{10}$$

Объединяя неравенства (9) и (10), выводим искомое соотношение (4). Теорема 2 доказана.

***Замечание* 2.** Так как в силу замечания 1 выполнение условия $\Lambda_{ij}$ влечет выполнение условия $\Lambda_{ji}$, то в теореме 2 достаточно требовать, чтобы выполнялись условия $\Lambda_{ij}$ при всех $i > j$ (или, что эквивалентно, при всех $i < j$ ). Кроме того, так как $I_{ij}(0) = I_{ji}(0)$, то $\min_{i\neq j} I_{ij}(0) = \min_{i>j} I_{ij}(0) = \min_{i<j} I_{ij}(0)$, и, значит, в (4) вместо $\min_{i\neq j}$ можно взять $\min_{i<j}$ или $\min_{i>j}$.

***Замечание* 3.** Очевидно, утверждение теоремы 2 остается в силе и в случае априорного распределения $\pi^t = (\pi_1^t, \pi_2^t, \ldots, \pi_N^t)$, зависящего от $t$ так, что $\psi_t^{-1} \ln(\pi_i^t / \pi_j^t) \to 0$ при $t \to \infty$ для всех $i \neq j$.

Теорему 2 можно сформулировать в следующем эквивалентном виде.

**Теорема 3.** *Пусть выполняются условия* $\Lambda_{ij}$ *с* $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$ *при всех* $i, j = 1, 2, \ldots, N$, $i \neq j$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln e_t^\pi = \max_{i\neq j} \min_\varepsilon \kappa_{ij}(\varepsilon). \tag{11}$$

***Доказательство*.** Известно, что $I_{ij}(\gamma) = \gamma\varepsilon_{ij}(\gamma) - \kappa_{ij}(\varepsilon_{ij}(\gamma))$ для любого $\gamma \in (\gamma_{ij}^-, \gamma_{ij}^+)$, где $\varepsilon_{ij}(\gamma)$ — любое решение уравнения $\kappa_{ij}'(\varepsilon) = \gamma$ [11]. Так как $0 \in (\gamma_{ij}^-, \gamma_{ij}^+)$, то отсюда следует, что $I_{ij}(0) = -\kappa_{ij}(\varepsilon_{ij}(0))$. С другой стороны, поскольку $\kappa_{ij}'(\varepsilon_{ij}(0)) = 0$, то $\kappa_{ij}(\varepsilon_{ij}(0)) = \min_\varepsilon \kappa_{ij}(\varepsilon)$. Таким образом, соотношение (11) вытекает из соотношения (4). Теорема 3 доказана.

***Замечание* 4.** Если $\xi^t = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t)$, где $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_t$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, то соотношение (11) хорошо известно [3], причем $\min\limits_{\varepsilon} \kappa_{ij}(\varepsilon)$ есть $D$-расхождение между двумя распределениями величины $\xi_1$, соответствующими гипотезам $H_i$ и $H_j$ [5].

***Замечание* 5.** Учитывая замечания 1 и 2, в равенстве (11) вместо $\max\limits_{i \neq j}$ можно взять $\max\limits_{i<j}$ или $\max\limits_{i>j}$.

**3. Асимптотики количества информации.** Ниже нам потребуется следующая лемма.

**Лемма 1.** *Справедливы оценки*

$$\mathbf{E}H(\theta/\xi^t) \geq -\ln(1 - e_t^\pi), \tag{12}$$

$$\mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) \leq h(e_t^\pi) + e_t^\pi \ln(N-1), \tag{13}$$

*где*

$$h(x) = -x\ln x - (1-x)\ln(1-x), \quad 0 \leq x \leq 1. \tag{14}$$

Неравенство (12) доказано в работе [14], а неравенство (13) — в работе [15]. Из леммы 1 вытекает следующее утверждение.

***Следствие* 1.** *Имеют место импликации*

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{E}H(\theta/\xi^t) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) = 0 \Leftrightarrow \lim_{t\to\infty} e_t^\pi = 0. \tag{15}$$

Импликации немедленно следуют из оценок (12) и (13) и неравенства (3).

***Замечание* 6.** Если $N = 2$, то импликации (15) дают необходимые и достаточные условия полной асимптотической разделимости семейств мер $(P_1^t)$ и $(P_2^t)$ при $t \to \infty$ в терминах $\mathbf{E}H(\theta/\xi^t)$ и $\mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi)$ (см. [1], теорема 2.2.1).

Следующая теорема дает асимптотики для средних условных энтропий $\mathbf{E}H(\theta/\xi^t)$ и $\mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi)$ при $t \to \infty$.

**Теорема 4.** *Пусть выполняются условия* $\Lambda_{ij}$ *с* $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$ *при всех* $i, j = 1, 2, \dots, N$, $i \neq j$. *Тогда имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\xi^t) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) = -\min_{i\neq j} I_{ij}(0). \tag{16}$$

***Доказательство.*** В силу соотношения (4) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln\ln(1 - e_t^\pi) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln e_t^\pi = -\min_{i\neq j} I_{ij}(0). \tag{17}$$

Из оценки (12) и соотношения (17) следует

$$\liminf_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\xi^t) \geq -\min_{i\neq j} I_{ij}(0). \tag{18}$$

Аналогично в силу соотношения (4) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln(h(e_t^\pi) + e_t^\pi \ln(N-1)) = -\min_{i\neq j} I_{ij}(0). \tag{19}$$

Из оценки (13) и соотношения (19) получаем

$$\limsup_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) \leq -\min_{i\neq j} I_{ij}(0). \tag{20}$$

Объединяя (18) и (20) и учитывая неравенство $\mathbf{E}H(\theta/\xi^t) \leq \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi)$, получаем соотношение (16). Теорема 4 доказана.

Аналогично теореме 3 утверждение (16) можно записать в следующем эквивалентном виде.

**Теорема 5.** *В условиях теоремы 4 имеет место следующее соотношение:*

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\xi^t) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) = \max_{i\neq j} \min_{\varepsilon} \kappa_{ij}(\varepsilon). \tag{21}$$

Доказательство теоремы 5 аналогично доказательству теоремы 3 и поэтому опускается.

*Замечание* 7. В силу замечания 2 в теоремах 4 и 5 достаточно требовать, чтобы условия $\Lambda_{ij}$ выполнялись лишь для всех $i > j$ (или, что эквивалентно, лишь для всех $i < j$). Кроме того, в силу замечаний 2 и 5 в соотношении (16) вместо $\min\limits_{i\neq j}$ можно взять $\min\limits_{i<j}$ или $\min\limits_{i>j}$, а в соотношении (21) вместо $\max\limits_{i\neq j}$ можно взять $\max\limits_{i<j}$ или $\max\limits_{i>j}$.

*Замечание* 8. Если $\xi^t = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t)$, где $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t$ — независимые одинаково распределенные случайные величины, то соотношение (21) хорошо известно [5].

Учитывая равенства (1) и (2), из теоремы 4 получаем следующее утверждение о поведении количеств информации $I(\xi^t, \theta)$ и $I(\delta_t^\pi, \theta)$ при $t \to \infty$.

*Следствие* 2. *В условиях теоремы 4 имеет место соотношение*

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln [H(\theta) - I(\xi^t, \theta)] = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln [H(\theta) - I(\delta_t^\pi, \theta)] = -\min_{i\neq j} I_{ij}(0),$$

*т. е. при* $t \to \infty$ (*здесь* $\rho = \min\limits_{i\neq j} I_{ij}(0)$)

$$I(\xi^t, \theta) = H(\theta) - e^{-\rho\psi_t(1+o(1))},$$

$$I(\delta_t^\pi, \theta) = H(\theta) - e^{-\rho\psi_t(1+o(1))}.$$

Полученные в теоремах 2–5 утверждения в общей схеме статистических экспериментов можно применить к частным моделям статистических экспериментов.

**4. Частные случаи.** Рассмотрим применение теорем 2–5 к частным моделям статистических экспериментов.

*Случай* $N = 2$. Пусть $N = 2$ и выполняется условие $\Lambda_{21}$ с $\Gamma_{21}^0 < 0 < \Gamma_{21}^1$. Тогда из теорем 2 и 3 в силу замечания 2 получаем

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln e_t^\pi = -I_{21}(0) = \min_{\varepsilon} \kappa_{21}(\varepsilon)$$

(ср. с соотношением (6.1) из работы [6]). Далее, из теорем 4 и 5 в силу замечания 7 следует

$$\lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\xi^t) = \lim_{t\to\infty} \psi_t^{-1} \ln \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) = -I_{21}(0) = \min_{\varepsilon} \kappa_{21}(\varepsilon)$$

(ср. с формулой (2.2) из работы [4]).

***Процесс нормальной авторегрессии.*** Пусть $\xi^t = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_t)$, $t = 1, 2, \ldots$, — наблюдения процесса авторегрессии, заданного с помощью рекуррентного соотношения $\xi_t = \theta\xi_{t-1} + \omega_t$, $t = 1, 2, \ldots$, где $\xi_0 = 0$, $\theta \in R^1$ – неизвестный случайный параметр, $\omega_t$ — независимые стандартные гауссовские величины, независящие от параметра $\theta$. Пусть параметр $\theta$ принимает значения $y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_N$, причем $|y_i| < 1$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N$. Введем функции $b_{ij}(\varepsilon) = -y_j - \varepsilon(y_i - y_j)$ и $c_{ij}(\varepsilon) = 1 + y_j^2 + \varepsilon(y_i^2 - y_j^2)$, $\varepsilon \in R^1$. Пусть $\varepsilon_{ij}^1$ и $\varepsilon_{ij}^2$ — корни уравнения $c_{ij}^2(\varepsilon) - 4b_{ij}^2(\varepsilon) = 0$, равные

$$\varepsilon_{ij}^1 = -\frac{(1+y_j)^2}{(y_i-y_j)(y_i+y_j+2)}, \qquad \varepsilon_{ij}^2 = -\frac{(1-y_j)^2}{(y_i-y_j)(2-y_i-y_j)}.$$

Из теоремы 1 работы [16] вытекает следующий результат.

**Лемма 2.** *Для всех* $i \neq j$ *выполняются условия* $\Lambda_{ij}$, *причем* $\psi_t = t$ *и*

$$\kappa_{ij}(\varepsilon) = \begin{cases} -\frac{1}{2}\ln\frac{c_{ij}(\varepsilon)+\sqrt{c_{ij}^2(\varepsilon)-4b_{ij}^2(\varepsilon)}}{2}, & \varepsilon \in [\varepsilon_{ij}^-, \varepsilon_{ij}^+]; \\ \infty, & \varepsilon \notin [\varepsilon_{ij}^-, \varepsilon_{ij}^+], \end{cases}$$

*где*

$$\varepsilon_{ij}^- = \varepsilon_{ij}^1 I(y_i > y_j) + \varepsilon_{ij}^2 I(y_i < y_j),$$

$$\varepsilon_{ij}^+ = \varepsilon_{ij}^1 I(y_i < y_j) + \varepsilon_{ij}^2 I(y_i > y_j).$$

Нетрудно заметить, что $\varepsilon_{ij}^- < 0$ и $\varepsilon_{ij}^+ > 1$ для всех $i \neq j$. Следовательно, $\Gamma_{ij}^0 = \gamma_{ij}^0$ и $\Gamma_{ij}^1 = \gamma_{ij}^1$ для всех $i \neq j$. Но $\gamma_{ij}^0 < 0$ и $\gamma_{ij}^1 > 0$ для всех $i \neq j$ и, значит, условие $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$ выполняется для всех $i \neq j$.

Из леммы 2 получаем $I_{ij}(0) = -\kappa_{ij}(\varepsilon_{ij}(0))$, где

$$\varepsilon_{ij}(0) = 2\frac{y_i - y_j - y_i y_j (y_i + y_j)}{(y_i - y_j)\left(4-(y_i+y_j)^2\right)}.$$

Если $y_i + y_j = 0$, то $\varepsilon_{ij}(0) = 2^{-1}$, и, значит, $I_{ij}(0) = -\kappa_{ij}(2^{-1}) = \ln(1+y_i^2)^{1/2}$. В частности, если $N = 2$ и $y_1 + y_2 = 0$, получаем

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln e_t^\pi = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln \mathbf{E}H(\theta/\xi^t) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln \mathbf{E}H(\theta/\delta_t^\pi) = -\ln\left(1+y_1^2\right)^{1/2}.$$

Используя теорему из работы [17], нетрудно показать, что условие $|y_i| < 1$ можно заменить условием $|y_i| \le 1$ для всех $i \neq j$, причем условие $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$ и в этом случае будет выполняться при всех $i \neq j$. На самом деле, пусть $y_1 < < y_2 < \ldots < y_N$. Тогда $y_1 \ge -1$ и $y_N \le 1$. Пусть $y_1 = -1$. Из [17] следует, что $\varepsilon_{i1}^- = = 0$, $\Gamma_{i1}^0 = -\gamma_{i1}^- = -\infty$ для всех $i = 2, 3, \ldots, N$. В силу замечания 1 $\varepsilon_{1i}^+ = = 1 - \varepsilon_{1i}^- = 1$ и $\Gamma_{1i}^1 = \gamma_{1i}^+ = -\gamma_{1i}^- = \infty$ для всех $i = 2, 3, \ldots, N$. Аналогично, если $y_N = 1$, то $\varepsilon_{iN}^- = 0$ и $\Gamma_{iN}^0 = \gamma_{iN}^- = -\infty$ для всех $i = 1, 2, \ldots, N-1$. Значит, в силу замечания 1 также $\varepsilon_{Ni}^+ = 1 - \varepsilon_{Ni}^- = 1$ и $\Gamma_{Ni}^1 = \gamma_{Ni}^+ = -\gamma_{iN}^- = \infty$ для всех $i = = 1, 2, \ldots, N-1$. Отсюда следует, что условие $\Gamma_{ij}^0 < 0 < \Gamma_{ij}^1$ выполняется для всех $i \neq j$.

Если $y_1 = -1$ и $y_N = 1$, то, как и выше, получаем $I_{1N}(0) = I_{N1}(0) = = \ln\sqrt{2}$. Если, кроме того, $N = 2$, то имеет место соотношение

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln e_t^\pi = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln \mathbf{E}H(\theta\,|\,\xi^t) = \lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln \mathbf{E}H(\theta\,|\,\delta_t^\pi) = -\ln\sqrt{2}.$$

Нетрудно заметить, что если $|y_i| > 1$ при некотором $i$, то условие $\Gamma_{ij}^0 < 0 < < \Gamma_{ij}^1$, вообще говоря, при некоторых $i \neq j$ не выполняется.

1. *Линьков Ю. Н.* Асимптотические методы статистики случайных процессов. – Киев: Наук. думка, 1993. –256 с.
2. *Боровков А. А.* Математическая статистика. – М.: Наука, 1984. – 472 с.

3. *Chernoff H.* A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations // Ann. Math. Statist. – 1952. – **23**, №4. – P.493–507..
4. *Renyi A.* On some problems of statistics from the point of view of information theory // Proc. Colloq. Inform. Theory. –Budapest, 1968. – **2**. – P. 343–357.
5. *Vajda I.* On the convergence of information contained in sequence of observations // Ibid. – P. 489–501.
6. *Vajda I.* Generalization of discrimination-rate theorems of Chernoff and Stein // Kybernetika. – 1990. – **26**, №4. – P.273–288.
7. *Liese F., Vajda I.* Convex statistical distances. – Leipzig: Teubner, 1987. –224 p.
8. *Kraft O., Plachky D.* Bounds for the power of likelihood ratio test and their asymptotic properties // Ann. Math. Statist. – 1970. – **41**, №5. – P. 1646–1654.
9. *Добрушин Р.Л.* Общая формулировка основной теоремы Шеннона в теории информации // Успехи мат. наук. – 1959. – **14**, №6. – С. 3–104.
10. *Пинскер М.С.* Информация и информационная устойчивость случайных величин и процессов. – М.: Изд-во АН СССР, 1960. – 203 с.
11. *Lin'kov Yu.N.* Large deviation theorems in the hypotheses testing problems // Exploring Stochastic Laws. Festschrift in Honour of the 70th Birthday of V.S. Korolyuk. – Utrecht: VSP, 1995. – P. 263–273.
12. *Линьков Ю.Н.* Большие уклонения в задаче различения считающих процессов // Укр. мат. журн. – 1993. – **45**, №11. – С. 1514–1521.
13. *Линьков Ю.Н., Медведева М.И.* Теоремы о больших уклонениях в задаче проверки двух простых гипотез // Там же.– 1995. – **47**, №2. – С. 227–235.
14. *Renyi A.* Statistics and information theory // Stud. sci. math. hung. – 1967. – **2**, № 1 – 2. – P. 249–256.
15. *Файнстейн А.* Основы теории информации. – М.: Изд-во иностр. лит., 1960. – 140 с.
16. *Линьков Ю.Н, Медведева М.И.* Теоремы о больших уклонениях в задаче различения процессов нормальной авторегрессии // Теория случайных процессов. – 1995. – **1 (17)**, № 1. – С. 71–81.
17. *Медведева М.И., Ладан О.Н.* Большие уклонения в задаче различения процессов нормальной авторегрессии // Обозрение прикл. и промышл. математики. – 1997. – **4**, № 3. – С. 381–382.

Получено 25.12.97