УДК 517.53

П. В. Філевич (Львів. ун-т)

ТОЧНА ОЦІНКА ВЕЛИЧИНИ ВИНЯТКОВОЇ МНОЖИНИ У СПІВВІДНОШЕННІ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ ФУНКЦІЙ

We obtain an exact estimate of quantity of the exceptional set in the Borel relation for entire functions.

Отримано точну оцінку величини виняткової множини у співвідношенні Бореля для цілих функцій.

Вступ. Нехай для цілої функції вигляду

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \tag{1}$$

$M(r,f) = \max\{|f(z)|: |z| = r\}$, $\mu(r,f) = \max\{|a_n|r^n: n \geq 0\}$ та $\nu(r,f) = \max\{n \geq 0: |a_n|r^n = \mu(r,f)\}$ — відповідно її максимум модуля, максимальний член та центральний індекс, а $G(r,f) = \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|r^n$. Нехай також H — клас неперервних, додатних, строго зростаючих до $+\infty$ на $[1;+\infty)$ функцій $h(r)$, а

$$\delta(h) \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln h(r)}{\ln r}$$

для кожної $h \in H$ $(0 \leq \delta(h) \leq +\infty)$.

З класичної теореми Вімана – Валірона (див., наприклад, [1]) випливає, що у відомому співвідношенні Е. Бореля

$$\ln G(r,f) \sim \ln\mu(r,f), \quad r \to +\infty, \quad r \notin E(f), \tag{2}$$

для кожної цілої функції f виняткову множину $E(f)$ можна вибрати так, щоб вона мала скінченну логарифмічну міру, тобто

$$\int_{E(f)\cap[1;+\infty)} r^{-1}dr < +\infty .$$

У 1970 р. Р. Лондон [2] покращив оцінку величини виняткової множини, помітивши, що у співвідношенні (2) вибір множини $E(f)$ завжди можна здійснити так, щоб вона мала скінченну міру: $\int_{E(f)\cap[1;+\infty)} dr < +\infty$. З допомогою аналогічних наведеним в [2] міркувань легко встановити (див., наприклад, [3]) наступне твердження: для довільної цілої функції f вигляду (1) співвідношення Бореля виконується з множиною $E(f)$ такою, що

$$\int_{E(f)\cap[1;+\infty)} r^n dr < +\infty$$

для кожного $n \geq 0$.

У зв'язку з переліченими результатами природним є питання про можливість отримання точної оцінки величини виняткової множини в (2). Відповідь на це запитання дає наступна теорема.

Теорема 1. *Нехай $h \in H$. Для того щоб для кожної цілої функції f вигляду (1) існувала множина $E(f)$ така, що одночасно виконуються співвідношення (2) та*

$$\int_{E(f)\cap[1;+\infty)} h(r)dr < +\infty,$$

необхідно і досить, щоб $\delta(h) < +\infty$.

Зауважимо, що аналогічне твердження, як легко бачити, справедливе тоді і стосовно співвідношення

$$\ln M(r,f) \sim \ln \mu(r,f), \quad r \to +\infty, \quad r \notin E(f).$$

Відмітимо також, що *достатність* у теоремі 1 випливає з наведеного вище результату з [3]. *Необхідність* легко отримується з такої теореми.

Теорема 2. *Для кожної функції* $h \in H$ *з* $\delta(h) = +\infty$ *існує ціла функція* f *вигляду* (1) *така, що при деякому* $\varepsilon > 0$ *для множини*

$$E = \{r > 1 : \ln G(r,f) > (1+\varepsilon) \ln \mu(r,f)\}$$

справедлива рівність

$$\int\limits_{E(f) \bigcap [1;+\infty)} h(r)dr = +\infty .$$

Доведення. Нехай $h \in H$, $\delta(h) = +\infty$. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що $h(1) \geq 1$.

Як легко бачити, існує строго зростаюча до $+\infty$ дійсна послідовність $\{c_k\}$ така, що $c_0 > e^2$ і $[h(c_k)] \leq \ln[h(c_{k+1})]/\ln c_{k+1}$, $k \geq 0$. Поклавши $n_0 = 0$ і $n_k = [h(c_{k-1})]$ $(k \geq 1)$, останню нерівність можна записати у вигляді

$$n_k \leq \frac{\ln n_{k+1}}{\ln c_k}, \quad k \geq 0. \tag{3}$$

Відзначимо, що $n_k \uparrow +\infty$ $(k \to +\infty)$.

Нехай $a_{n_0} = 1$, $a_{n_k} = \left(c_0^{n_1-n_0} c_1^{n_2-n_1} \ldots c_{k-1}^{n_k-n_{k-1}}\right)^{-1}$, $k \geq 1$. Тоді, використовуючи нерівність (3), отримуємо

$$a_{n_k} \leq \left(c_{k-1}^{n_k-n_{k-1}}\right)^{-1} \leq \left(c_{k-1}^{n_k/2}\right)^{-1}, \quad k \geq 1. \tag{4}$$

З нерівності (4) випливає, що функція

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n_k} z^{n_k}$$

є цілою. Крім того,

$$\left(\frac{a_{n_k}}{a_{n_{k+1}}}\right)^{(n_{k+1}-n_k)^{-1}} = c_k \uparrow +\infty,$$

а тому, як добре відомо, $\mu(r,g) = |a_{n_k}| r^{n_k}$ і $\nu(r,g) = n_k$ для всіх $r \in [c_{k-1}; c_k)$, $k \geq 1$.

Покладемо $p_0 = 1$, $p_k = \left[a_{n_k} c_k^{n_k}\right]$, $k \geq 1$. Використовуючи двічі нерівність (3), при $k \geq 1$ отримуємо

$$p_k \leq \frac{c_k^{n_k}}{2} \leq \frac{n_{k+1}}{2} \leq n_{k+1} - n_k.$$

Розглянемо цілу функцію

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{p_k-1} a_{n_k} c_k^{-m} z^{n_k+m}.$$

Безпосередньо легко перевіряється, що $\mu(r,f) = \mu(r,g) = |a_{n_k}| r^{n_k}$ і $\nu(r,f) = \nu(r,g) = n_k$ для всіх $r \in [c_{k-1}; c_k)$, $k \geq 1$, а тому

$$G(c_l, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{p_k-1} a_{n_k} c_k^{-m} c_l^{n_k+m} \geq p_l a_{n_l} c_l^{n_l} \geq (\mu(c_l, f) - 1)\mu(c_l, f).$$

Звідси отримуємо

$$\theta(f) \overset{\text{def}}{=} \varlimsup_{r \to +\infty} \frac{\ln G(r, f)}{\ln \mu(r, f)} \geq 2.$$

Зауважимо також, що оскільки $\nu(r, f) = n_k = [h(c_{k-1})] \leq h(r)$ для всіх $r \in [c_{k-1}; c_k)$, $k \geq 1$, то

$$\nu(r, f) \leq h(r), \quad r \geq c_0. \tag{5}$$

Нехай ε і ω — такі числа, що $0 < \varepsilon < \omega < \theta(f) - 1$. Розглянемо множину $E = \{r > 1 : \ln G(r, f) > (1 + \varepsilon) \ln \mu(r, f)\}$. Вона відкрита і тому є об'єднанням зліченної кількості інтервалів, які попарно не перетинаються. Отже, як легко бачити, існують послідовності $\{x_s\}$ і $\{y_s\}$ дійсних чисел такі, що:

1) $(x_s; y_s) \subset E$, $s \geq 0$;
2) $x_s < y_s < x_{s+1}$, $s \geq 0$;
3) $x_s \to +\infty$, $s \to +\infty$;
4) $\ln G(x_s, f) = (1 + \varepsilon) \ln \mu(x_s, f)$, $s \geq 0$;
5) $\ln G(y_s, f) = (1 + \varepsilon) \ln \mu(y_s, f)$, $s \geq 0$;
6) на інтервалі $(x_s; y_s)$ існує точка t_s, в якій

$$\ln G(t_s, f) = (1 + \omega) \ln \mu(t_s, f), \quad s \geq 0. \tag{6}$$

Доведемо, що

$$\varlimsup_{s \to +\infty} (\ln \mu(y_s, f) - \ln \mu(x_s, f)) = +\infty. \tag{7}$$

Дійсно, якщо існує така стала $K > 0$, що $\ln \mu(y_s, f) - \ln \mu(x_s, f) \leq K$, то

$$\ln \mu(t_s, f) \geq \ln \mu(x_s, f) \geq \ln \mu(y_s, f) - K = (1 + \varepsilon)^{-1} \ln G(x_s, f) - K >$$
$$> (1 + \omega) \ln G(t_s, f), \quad s \geq s_0,$$

а це суперечить співвідношенню (6).

Отже, співвідношення (7) є вірним. Тому

$$\int\limits_{\bigcup_{s=0}^{\infty}(x_s; y_s)} d(\ln \mu(r, f)) = +\infty.$$

Оскільки $\bigcup_{s=0}^{\infty}(x_s; y_s) \subset E$, то

$$\int\limits_E \nu(r, f)\, dr \geq \int\limits_E \frac{\nu(r, f)}{r}\, dr \geq \int\limits_{\bigcup_{s=0}^{\infty}(x_s; y_s)} d(\ln \mu(r, f)) = +\infty.$$

Залишилось використати нерівність (5). Теорему 2 доведено.

1. *Виттих Г. В.* Новейшие исследования по однозначным аналитическим функциям. – М.: Физматгиз, 1960. – 320 с.
2. *London R. R.* Note on a lemma Rosenbloom // Quart. J. Math. – 1970. – **21**, № 81. – P. 67–69.
3. *Філевич П. В.* До теореми Лондона про співвідношення Бореля для цілих функцій // Укр. мат. журн. – 1998. – **50**, № 12. – С. 1578–1580.

Одержано 30.12.98