УДК 512.547.25

П. М. Гудивок, В. И. Погориляк (Ужгород. нац. ун-т)

МАТРИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ КОНЕЧНЫХ p-ГРУПП НАД КОММУТАТИВНЫМИ ЛОКАЛЬНЫМИ КОЛЬЦАМИ ХАРАКТЕРИСТИКИ p^s

We establish the cases where the description of nonequivalent matrix representations of a finite p-group over a commutative local ring of characteristic p^s is a wild problem.

Виявлено, коли задача опису нееквівалентних матричних зображень скінченної p-групи над комутативним локальним кільцем характеристики p^s є дикою.

Задача $D(G,K)$ описания с точностью до эквивалентности матричных представлений конечной группы G над коммутативным кольцом K с единицей называется *дикой*, если она включает задачу о классификации с точностью до подобия пар $(n\times n)$-мерных матриц над полем $\overline{K}=K/V$ (n — произвольное натуральное число, V — некоторый максимальный идеал кольца K). Для колец K характеристики p^s (p — простое число, $s>0$) задача $D(G,K)$ решена в следующих случаях:

1) K — поле характеристики $p>0$ [1–6];

2) K — полное дискретно нормированное кольцо характеристики p [7];

3) G — конечная p-группа, K — нетерово факториальное кольцо характеристики p [8];

4) G — конечная p-группа порядка $|G|>2$, K — область целостности характеристики p [8, 9];

5) G — конечная p-группа, $K=\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}$, $s>1$ [10, 11];

6) G — конечная p-группа, $K=R/P^m$, где R — дискретно нормированное кольцо с полем вычетом характеристики p, P — максимальный идеал кольца R [12].

Пусть, далее, K — коммутативное локальное кольцо характеристики p^s (p — простое число, $s>0$), V — максимальный идеал кольца K, $\overline{K}=K/V$ ($V\neq 0$, $V\neq K$). В данной работе исследуется, когда задача $D(G,K)$ является дикой, если G — конечная p-группа. Основные результаты этой работы анонсированы в [13].

Теорема 1. *Пусть G — конечная нециклическая p-группа и K — коммутативное локальное кольцо характеристики p^s $(s>0)$, не являющееся полем. Задача $D(G,K)$ является дикой.*

Доказательство. Очевидно, теорему достаточно доказать для абелевой группы H типа (p,p): $H=\langle a\rangle\times\langle b\rangle$, $ab=ba$, $a^p=b^p=e$. Рассмотрим ряд случаев.

Пусть кольцо K содержит ненулевой нильпотентный элемент t ($t^r=0$, $t^{r-1}\neq 0$, $r>1$), причем если $s>1$, то положим $t=p$. Рассмотрим K-представление группы H вида

$$a\to E_n+t^{r-1}A,\qquad b\to E_n+t^{r-1}B, \tag{1}$$

где E_n — единичная $(n\times n)$-мерная матрица; A, B — произвольные $(n\times n)$-мерные матрицы над кольцом K; n — произвольное натуральное число.

Нетрудно проверить, что описание с точностью до K-эквивалентности всех K-представлений вида (1) группы H включает задачу о паре матриц над полем $\overline{K}$.

Пусть кольцо K не содержит ненулевые нильпотентные элементы. Тогда $s=1$. Рассмотрим K-представление $\Gamma(A,B)$ группы H следующего вида:

$$a \to \Gamma_a(A,B) = \begin{pmatrix} E_n & 0 & E_n & 0 \\ 0 & E_n & 0 & u^2E_n \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad b \to \Gamma_b(A,B) = \begin{pmatrix} E_n & 0 & A & uE_n \\ 0 & E_n & uE_n & u^2B \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \quad (2)$$

где $u \in V$ и $u \neq 0$. Пусть K-представления $\Gamma(A,B)$ и $\Gamma(A',B')$ группы H являются K-эквивалентными, т.е. существует такая обратимая матрица C над кольцом K, что

$$\Gamma_a(A,B)\cdot C = C\cdot\Gamma_a(A',B'), \quad \Gamma_b(A,B)\cdot C = C\cdot\Gamma_b(A',B'). \quad (3)$$

Пусть $C=\|C_{ij}\|$, где C_{ij} — $(n\times n)$-мерная матрица над кольцом K. Из (2) и (3) получаем

$$C_{31} = C_{32} = C_{41} = 0, \quad C_{33} = C_{11},$$

$$C_{34} = u^2C_{12}, \quad C_{21} = u^2C_{43},$$

$$u^2C_{44} = u^2C_{22}, \quad AC_{33} + uC_{43} = C_{11}A' + uC_{12},$$

$$uC_{33} + u^2BC_{43} = C_{21}A' + uC_{22}, \quad uC_{34} + u^2BC_{44} = uC_{21} + u^2C_{22}B'.$$

Отсюда вытекает

$$C_{21} \equiv C_{31} \equiv C_{41} \equiv 0 \pmod V, \quad C_{44} \equiv C_{33} \equiv C_{22} \equiv C_{11} \pmod V,$$

$$AC_{11} \equiv C_{11}A' \pmod V, \quad BC_{11} \equiv C_{11}B' \pmod V,$$

где C_{11} — обратимая матрица над кольцом K. Следовательно, описание с точностью до K-эквивалентности всех K-представлений группы H вида (2) включает задачу о паре матриц над полем $\overline{K}$. Теорема доказана.

Лемма 1. *Пусть $H=\langle a\rangle$ — циклическая p-группа порядка p^2 и K — коммутативное локальное кольцо характеристики p^s, $s>1$. Задача $D(H,K)$ является дикой.*

Доказательство. Рассмотрим K-представления $\Gamma(A,B)$ группы $H = \langle a | a^{p^2}=e\rangle$ вида

$$a \to \Gamma_a(A,B) = E_{8n} + p^{s-2}\begin{pmatrix} 0 & E_{4n} \\ pT_1 & pT_2(A,B) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где E_m — единичная $(m\times m)$-мерная матрица,

$$T_1 = \begin{pmatrix} 0 & E_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad T_2(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A & 0 & E_n \\ B & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (5)$$

A, B —произвольные $(n\times n)$-мерные матрицы над кольцом K; n — произвольное натуральное число.

Покажем, что задача описания всех неэквивалентных K-представлений вида (4) группы H является дикой. Пусть K-представления $\Gamma(A,B)$ и $\Gamma(A',B')$ группы H являются K-эвивалентными, т. е.

$$\Gamma_a(A,B)\cdot C = C\cdot\Gamma_a(A',B'), \tag{6}$$

где

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 \\ C_3 & C_4 \end{pmatrix}$$

является обратимой матрицей над кольцом K (C_i, $i=1,\ldots,4$, — матрица порядка $4n$). Из (4) и (6) получаем

$$p^{s-2}C_3 = p^{s-1}C_2T_1, \tag{7}$$

$$p^{s-2}C_4 = p^{s-2}C_1 + p^{s-1}C_2T_2(A',B'), \tag{8}$$

$$p^{s-1}T_1C_1 + p^{s-1}T_2(A,B)C_3 = p^{s-1}C_4T_1, \tag{9}$$

$$p^{s-1}T_1C_2 + p^{s-1}T_2(A,B)C_4 = p^{s-2}C_3 + p^{s-1}C_4T_2(A',B'). \tag{10}$$

Из (7) – (9) следует

$$C_3 \equiv 0 \pmod V, \qquad C_4 \equiv C_1 \pmod V, \tag{11}$$

$$T_1C_1 \equiv C_1T_1 \pmod V. \tag{12}$$

Пусть $C=\|C_{ij}\|$, где C_{ij} — $(n\times n)$-мерная матрица над кольцом K. Тогда из (5) и (12) получаем

$$C_1 \equiv \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ 0 & C_{11} & C_{12} & 0 \\ 0 & 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix} \pmod V. \tag{13}$$

Далее из (7), (10) и (11) вытекает

$$T_1C_2+T_2(A,B)C_1 \equiv C_2T_1+C_1T_2(A',B') \pmod V.$$

Отсюда, из (5) и (13) получаем

$$C_{35} \equiv 0 \pmod V, \qquad C_{44} \equiv C_{11} \pmod V,$$

$$AC_{11} \equiv C_{11}A' \pmod V, \qquad BC_{11} \equiv C_{11}B' \pmod V,$$

где C_{11} — обратимая матрица над K. Значит, задача $D(H,K)$ является дикой. Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $H=\langle a\rangle$ — циклическая p-группа порядка p и K — коммутативное локальное кольцо характеристики p^s, $s>1$. Задача $D(H,K)$ не является дикой тогда и только тогда, когда $V=Kp$.*

Доказательство. *Достаточность* этой леммы вытекает из [10]. Докажем *необходимость*.

Пусть $V \neq Kp$. Рассмотрим сначала случай, когда $pV^{s-1} \neq 1$. Тогда существует такое натуральное число $r \leq s-1$, что $p^{s-r}V^r \neq 0$ и $p^{s-r+1}V^{r-1} = 0$. Поэтому найдутся такие элементы $t_i \in V$, $i = 1, \ldots, r$, что $p^{s-r}t_1t_2 \ldots t_r \neq 0$ и $p^{s-r+1}t_1t_2 \ldots t_{r-1} = 0$. Обозначим

$$u = p^{s-r}t_1t_2 \ldots t_{r-1}.$$

Легко проверить, что отображение $\Gamma(A,B)$ вида

$$a \to \Gamma_a(A,B) = E_{8n} + u\begin{pmatrix} 0 & E_{4n} \\ t_rT_1 & t_rT_2(A,B) \end{pmatrix} \tag{14}$$

(см. обозначения (5)) является K-представлением группы $H = \langle a \mid a^p = e \rangle$. Как и в случае (4), доказывается, что задача описания с точностью до K-эквивалентности всех K-представлений вида (14) группы H является дикой.

Наконец, пусть $pV^{s-1} = 0$. Тогда найдется такое натуральное число $r < s$, что

$$V^{s-r} \neq Kp^{s-r}, \qquad pV^{s-r} = Kp^{s-r+1}.$$

Следовательно, существует такой элемент $u_1 \in V^{s-r}$, что $u_1 \notin Kp^{s-r}$ и $u_1p = u_2p^{s-r+1}$, $u_2 \in K$. Положим $w = u_1 - u_2p^{s-r}$ и $v = p^{s-1}$. Тогда

$$wv = v^2 = pw = pv = 0. \tag{15}$$

Нетрудно проверить, используя (15), что отображение $\Gamma'(A,B)$ вида

$$a \to \Gamma'_a(A,B) = E_{8n} + \begin{pmatrix} 0 & wE_{4n} \\ vT_1 & vT_2(A,B) \end{pmatrix} \tag{16}$$

(см. обозначения (5)) является K-представлением группы $H = \langle a \mid a^p = e \rangle$ и задача описания с точностью до K-эквивалентности всех K-представлений вида (16) группы H является дикой. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть G — конечная p-группа порядка $|G| > 1$, K — коммутативное локальное кольцо характеристики p^s, $s > 1$, V — максимальный идеал кольца K. Задача $D(G,K)$ не является дикой тогда и только тогда, когда $|G| = p$ и $V = Kp$.*

Доказательство теоремы 2 следует из теоремы 1 и лемм 1 и 2.

Лемма 3. *Пусть $H = \langle a \rangle$ — циклическая p-группа порядка $|H| > 2$ и K — коммутативное локальное кольцо характеристики p, не являющееся полем. Задача $D(H,K)$ является дикой.*

Доказательство. Рассмотрим сначала случай, когда максимальный идеал V кольца K содержит ненильпотентный элемент u. Очевидно, отображение $\Gamma(A,B)$ вида

$$a \to \Gamma_a(A,B) = \begin{pmatrix} E_n & 0 & u^4E_n & 0 & uA & B \\ 0 & E_n & 0 & u^2E_n & E_n & 0 \\ 0 & 0 & E_n & 0 & u^2E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_n & 0 & u^2E_n \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E_n \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где n — произвольное натуральное число (E_n — единичная $(n \times n)$-мерная матрица; A, B — произвольные $(n \times n)$-мерные матрицы над кольцом K), является K-представлением группы $H = \langle a \rangle$ порядка $|H| > 2$.

Покажем, что задача описания всех неэквивалентных K-представлений вида (17) группы H является дикой. Пусть K-представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ группы H являются K-эквивалентными, т. е. существует такая матрица $C \in GL(6n, K)$, что

$$\Gamma_a(A, B) \cdot C = C \cdot \Gamma_a(A', B'). \tag{18}$$

Обозначим $C = \| C_{ij} \|$, где C_{ij}, $1 \le i, j \le 6$, — $(n \times n)$-мерная матрица. Тогда из (17) и (18) получаем

$$u^2 C_{51} = u^2 C_{52} = u^4 C_{53} = u^6 C_{54} = 0, \qquad u^6 C_{31} = u^6 C_{32} = 0,$$

$$u^4 C_{41} = u^4 C_{42} = 0, \qquad u^2 C_{61} = u^2 C_{62} = u^2 C_{63} = u^4 C_{64} = 0,$$

$$u^6 C_{65} = u^8 C_{21}, \qquad u^8 C_{33} = u^8 C_{11},$$

$$u^8 C_{44} = u^8 C_{22}, \qquad u^6 C_{66} = u^6 C_{44},$$

$$u^2 C_{45} + C_{55} = u C_{21} A' + C_{22} + u^2 C_{23}, \qquad u^2 C_{55} = u C_{31} A' + C_{32} + u^2 C_{33},$$

$$u^7 C_{12} = u^9 C_{34}, \qquad u^4 C_{36} + u A C_{56} + B C_{66} = C_{11} B' + u^2 C_{14},$$

$$u^{11} C_{35} + u^8 A C_{55} + u^7 B C_{65} = u^8 C_{11} A' + u^7 C_{12} + u^9 C_{13}.$$

Отсюда следует

$$C_{6j} \equiv 0 \pmod V, \quad j = 1, \ldots, 5, \qquad C_{ii} \equiv C_{11} \pmod V, \quad i = 2, \ldots, 6,$$

$$A C_{11} \equiv C_{11} A' \pmod V, \qquad B C_{11} \equiv C_{11} B' \pmod V. \tag{19}$$

Поскольку C_{11} — обратимая матрица над K, из (19) получаем доказательство теоремы в рассматриваемом случае.

Пусть, далее, все элементы идеала V нильпотентны. Тогда найдется такой элемент $t \in V$, что $t^r = 0$, $t^{r-1} \ne 0$, $r \ge 2$. Рассмотрим K-представления $\Gamma(A, B)$ группы $H = \langle a \rangle$ следующего вида:

$$a \to \Gamma_a(A, B) = E_{12n} + t^{r-2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & tE_{4n} \\ E_{4n} & 0 & 0 \\ 0 & tT_1 & tT_2(A, B) \end{pmatrix}, \tag{20}$$

где T_1 и $T_2(A, B)$ — матрицы из (5).

Покажем, что задача описания всех неэквивалентных K-представлений вида (20) группы H является дикой. Пусть K-представления $\Gamma(A, B)$ и $\Gamma(A', B')$ группы H являются K-эквивалентными, т. е. выполняется условие (18), где

$$C = \begin{pmatrix} C_1 & C_2 & C_3 \\ C_4 & C_5 & C_6 \\ C_7 & C_8 & C_9 \end{pmatrix}$$

является обратимой матрицей над кольцом K (C_i — матрица порядка $4n$, $i = 1, \ldots, 9$). Из (20) и (18) получаем

$$t^{r-1}C_7 = t^{r-2}C_2, \qquad t^{r-1}C_9 = t^{r-1}C_1 + t^{r-1}C_3T_2(A', B'),$$

$$t^{r-2}C_1 = t^{r-2}C_5, \qquad t^{r-2}C_2 = t^{r-1}C_6T_1,$$

$$t^{r-2}C_3 = t^{r-1}C_4 + t^{r-1}C_6T_2(A', B'), \qquad t^{r-1}T_1C_4 + t^{r-1}T_2(A, B)C_7 = t^{r-2}C_8,$$

$$t^{r-1}T_1C_5 + t^{r-1}T_2(A, B)C_8 = t^{r-1}C_9T_1,$$

$$t^{r-1}T_1C_6 + t^{r-1}T_2(A, B)C_9 = t^{r-1}C_7 + t^{r-1}C_9T_2(A', B').$$

Отсюда следует

$$t^{r-1}T_1C_6 + t^{r-1}T_2(A, B)C_9 = t^{r-1}C_6T_1 + t^{r-1}C_9T_2(A', B'), \tag{21}$$

$$C_2 \equiv C_3 \equiv C_8 \equiv 0 \pmod V, \qquad C_1 \equiv C_5 \equiv C_9 \pmod V, \tag{22}$$

$$T_1C_5 \equiv C_9T_1 \pmod V. \tag{23}$$

Из (22) и (23) вытекает, что справедливо условие (12), где матрица C_1 обратима над кольцом K. Пусть

$$C_1 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{pmatrix}, \qquad C_6 = \begin{pmatrix} C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где C_{ij} — $(n \times n)$-матрица над кольцом K. Тогда из (12) и (5) получаем, что для матрицы C_1 выполняется (13). Из (21) и (22) следует

$$T_1C_6 + T_2(A, B)C_1 \equiv C_6T_1 + C_1T_2(A', B') \pmod V.$$

Отсюда, из (24), (5) и (13) получаем

$$C_{35} \equiv 0 \pmod V, \qquad C_{44} \equiv C_{11} \pmod V,$$

$$AC_{11} \equiv C_{11}A' \pmod V, \qquad BC_{11} \equiv C_{11}B' \pmod V,$$

где C_{11} — обратимая матрица над K. Значит, задача описания всех неэквивалентных K-представлений вида (20) группы $H = \langle a \rangle$ порядка $|H| > 2$ и в этом случае является дикой. Лемма доказана.

Теорема 3. *Пусть G — конечная p-группа порядка $|G| > 2$, K — коммутативное локальное кольцо характеристики p, не являющееся полем. Задача $D(G, K)$ является дикой.*

Доказательство теоремы 3 следует из теоремы 1 и леммы 3.

Замечание. В [14] задача $D(H, K)$ решена для группы H порядка 2 в следующих случаях: 1) K содержит ненулевой нильпотентный элемент; 2) K содержит собственный идеал, порожденный не менее чем тремя элементами.

1. *Башев В. А.* Представления группы $Z_2 \times Z_2$ в поле характеристики 2 // Докл. АН СССР. – 1961. – **141**, № 5. – С. 1015 – 1018.
2. *Кругляк С. А.* О представлениях группы (p, p) над полем характеристики p // Там же. – 1963. – **156**, № 6. – С. 1253 – 1256.

3. *Brenner S.* Modular representations of p-groups // J. Algebra. – 1970. – **15**, № 1. – P. 89 – 102.
4. *Бондаренко В. М.* Представления диэдральных групп над полем характеристики 2 // Мат. сб. – 1975. – **96**, № 1. – С. 63 – 74.
5. *Ringel C.* The indecomposable representations of dihedral 2-groups // Math. Ann. – 1975. – **214**, № 1. – P. 19 – 34.
6. *Бондаренко В. М., Дрозд Ю. А.* Представленческий тип конечных групп // Зап. науч. сем. Ленингр. отд-ния Мат. ин-та АН СССР. – 1977. – **71**. – С. 24 – 41.
7. *Гудивок П. М.* О представлениях конечных групп над полным дискретно нормированным кольцом // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1978. – **148**. – С. 96 – 105.
8. *Гудивок П. М., Погориляк Е. Я.* О модулярных представлениях конечных групп над областями целостности // Там же. – 1990. – **183**. – С. 78 – 86.
9. *Гудивок П. М.* О представлениях прямого произведения групп над полным дискретно нормированным кольцом // Докл. АН СССР. – 1977. – **237**, № 1. – С. 25 – 27.
10. *Дроботенко В. С., Дроботенко Э. С., Жилинская З. П., Погориляк Е. Я.* Представления циклической группы простого порядка p над кольцом классов вычетов по модулю p^s // Укр. мат. журн. – 1965. – **17**, № 5. – С. 28 – 42.
11. *Бондаренко В. М.* О подобии матриц над кольцом классов вычетов // Мат. сб. – Киев: Наук. думка, 1976. – С. 275 – 277.
12. *Гудивок П. М., Погориляк Е. Я.* О представлениях конечных групп над некоторыми локальными кольцами // Докл. АН УССР. – Сер. А. – 1981. – № 4. – С. 12 – 14.
13. *Гудивок П. М., Погориляк В. И.* Представления конечных p-групп над локальными кольцами положительной характеристики // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1989. – № 2. – С. 5 – 8.
14. *Погоріляк В. Й.* Про зображення циклічних 2-груп над комутативними локальними кільцями характеристики 2 // Наук. вісн. Ужгород. ун-ту. Сер. мат. – 1997. – Вип. 2. – С. 86 – 91.

Получено 05.02.2002