УДК 517.944

Ю. Н. Валицкий (Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, Россия),
Б. И. Голец (Ин-т экономики и права „Крок", Киев),
Т. И. Зеленяк (Ин-т математики СО РАН, Новосибирск, Россия)

МНОГОТОЧЕЧНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

We establish differential properties of generalized solutions of multipoint boundary-value problems for ordinary differential equations.

Встановлюються диференціальні властивості узагальнених розв'язків багатоточкових крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь.

1. В работе С. Л. Соболева [1] рассматривались расширения операторов, связанные с дифференциальными операторами, определенными на функциях, которые принимают заданные значения на многообразиях различных размерностей. К этому же кругу вопросов относятся так называемые многоточечные граничные задачи для обыкновенных дифференциальных операторов, исследованные, например, в [2 – 10].

Некоторые исследователи относят эти задачи к некорректно поставленным. Однако многие из таких задач укладываются в схему теории самосопряженных расширений симметричных операторов в гильбертовом пространстве. При этом получают нормально разрешимые краевые задачи, обратимые операторные уравнения и эволюционные задачи, корректную постановку которых легко можно установить методами теории групп и полугрупп операторов.

Отметим монографию Ф. Р. Гантмахера и М. Г. Крейна [11], где исследовались уравнения малых колебаний упругого континуума с n сосредоточенными массами, в частности, задачи об описании линии прогиба струны под действием n сосредоточенных сил, о поперечных колебаниях балки, в конечном числе сечений которой расположены n сосредоточенных масс, и т. п.

2. Будем рассматривать лишь вопрос о вещественных расширениях симметричных полуограниченных операторов в вещественном гильбертовом пространстве. Построение таких расширений можно проводить по следующей схеме.

Пусть A — замкнутый симметричный оператор в гильбертовом пространстве H с областью определения $\mathcal{D}(A)$ и областью значений $R(A)$, причем $\overline{\mathcal{D}(A)} = H$. Пусть $(Ax, x) \geq m(x, x)$, где $m > 0$. Обозначим через V ядро оператора A^*: $V = \{v, A^* v = 0\}$. В силу принятых предположений $R(A)$ является подпространством, причем

$$R(A^*) = H = V \dotplus R(A).$$

Пусть T — оператор, определенный условиями

$$A^* Tu = u, \quad (Tu, v) = 0$$

для всех $v \in V$ и любого $u \in H$. Тогда область определения сопряженного оператора есть прямая сумма

$$\mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A) \oplus TV \oplus V.$$

Пусть A_s — какое-нибудь самосопряженное расширение оператора A. Если уравнение $A_s z = 0$ имеет лишь тривиальное решение и $w \in \mathcal{D}(A_s)$, то $w = u + Tv + Bv$, где B — самосопряженный оператор, действующий из V в V со скалярным произведением, индуцируемым в V скалярным произведением из H. Если же ядро самосопряженного расширения A_s оператора A является подпространством V_1, $V = V_1 \dotplus V_2$, где V_2 — ортогональное дополнение к V_1 в пространстве V, то

$$\mathcal{D}(A_s) = \mathcal{D}(A) \oplus V_1 \oplus (T+B)V_2.$$

Здесь B — самосопряженный оператор из V_2 в V_2. Элемент $f = Tu$ — то решение уравнения $A^* f = u$, которое ортогонально V, а $g = (T+B)v_2$ — решение уравнения $A_s g = v_2 \in V_2$, ортогональное V_1 (заметим, что уравнение $A_s g = v_1 \in V_1$ не имеет решений при $v_1 \neq 0$). Тем самым если $w \in \mathcal{D}(A_s)$, то

$$w = u + v_1 + Tv_2 + Bv_2, \quad v_2 \in V_2, \quad u \in \mathcal{D}(A).$$

В этом представлении элементы u, v_1 и v_2 определяются однозначно. (См. в связи с этим также статью М. Ш. Бирмана [12].)

Особое место в теории расширений симметричных операторов занимает расширение по Фридрихсу [13]. Если ввести скалярное произведение $[u, v] = (Au, v)$ для $u, v \in \mathcal{D}(A)$ и замкнуть $\mathcal{D}(A)$ по норме $[u,u]^{1/2}$, обозначив полученное пространство через H_A, то расширение по Фридрихсу A_F — единственное самосопряженное расширение оператора A, имеющее свойство $H_A = H_{A_F}$, т. е.

$$\mathcal{D}(A_F) = H_A \bigcap \mathcal{D}(A^*).$$

Из теоремы Фридрихса вытекает, что для каждого элемента вида Tv, где $A^* v = 0$, существует единственный элемент $B_0 v$, $A^* B_0 v = 0$, такой, что $Tv + B_0 v \in H_A$. В самом деле, если $Tv + v_1 \in H_A$ и $Tv + v_2 \in H_A$, где $A^* v_i = 0$, то разность $v_3 = v_1 - v_2$ также принадлежит H_A, причем $A^* v_3 = 0$. Но тогда $v_3 \in H_{A_F}$, $A_F v_3 = A^* v_3 = 0$ и $0 = (A_F v_3, v_3) \geq m(v_3, v_3)$, т. е. $v_3 = 0$. Заметим также, что $(A_F u, u) \geq m(u,u)$ для $u \in \mathcal{D}(A_F)$.

3. Рассмотрим дифференциальный оператор

$$\mathcal{L} u = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n u}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} u}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n u, \tag{1}$$

определенный для $u \in W_2^{(2n)}(-1, 1)$, удовлетворяющих граничным условиям

$$u^{(k)}(-1) = u^{(k)}(+1) = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{2}$$

Будем предполагать, что $p_i(x) \in C^i(-1,1)$, $p_i \geq \delta > 0$, где δ — постоянная. Функция Грина для оператора $\mathcal{L}$ имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \sum\limits_1^n w_i(\xi) y_i(x), & x < \xi; \\ \sum\limits_1^n w_i(x) y_i(\xi), & x > \xi, \end{cases}$$

где $\mathcal{L} y_i = \mathcal{L} w_i = 0$, $y_i^{(k)}(-1) = w_i^{(k)}(+1) = 0$, $k = 0, \ldots, n-1$, функции $y_1(x), \ldots$ $\ldots, y_n(x)$, $w_1(x), \ldots, w_n(x)$ линейно независимы,

$$\left.\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}\right|_{x=\xi+0} = \left.\frac{\partial^j G(x,\xi)}{\partial x^j}\right|_{x=\xi-0}, \quad j = 0, 1, \ldots, 2n-2,$$

$$\left.\frac{\partial^{(2n-1)} G(x,\xi)}{\partial x^{(2n-1)}}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial^{(2n-1)} G(x,\xi)}{\partial x^{(2n-1)}}\right|_{x=\xi-0} = \frac{(-1)^n}{p_0(x)}.$$

Положим $y = y^{[0]}$, $\dfrac{d}{dx}y^{[k-1]} = y^{[k]}$, $k = 1, \ldots, n-1$, $\dfrac{d}{dx}y^{[n-1]} = \dfrac{1}{p_0}y^{[n]}$,

$$\frac{d}{dx}y^{[2n-k]} = p_{n-k+1}\,y^{[k-1]} - y^{[2n-k+1]}, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Обозначим

$$\frac{d^{[k]}y(x)}{dx^{[k]}} = y^{[k]}, \quad v_k(\xi) = \left.\frac{\partial^{[k]}G(x,\xi)}{\partial x^{[k]}}\right|_{x=0} \quad \text{для} \quad 0 \le k \le 2n-1.$$

Лемма 1. *Для функции* $v_k(x)$ *выполнено* $v_k \in C_{2n}(-1,0)$, $v_k \in C_{2n}(0,1)$, $\mathcal{L}v_k(x) \equiv 0$ *для* $x \neq 0$ *и* $-1 \le x \le +1$, $v_k^{[j]}(-0) = v_k^{[j]}(+0)$ *для* $j \neq 2n-k-1$, $v_k^{[2n-k-1]}(+0) - v_k^{[2n-k-1]}(-0) = (-1)^{n+k}$.

Рассмотрим оператор $\mathcal{L}_k$, $0 \le k < 2n$, с областью определения $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$: $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$, если $u \in W_2^{(2n)}(-1,0)$, $u \in W_2^{(2n)}(0,1)$, выполнены граничные условия (2) и $u^{[k]}(+0) = u^{[k]}(-0) = 0$, $u^{[j]}(+0) = u^{[j]}(-0)$ для $j \neq 2n-k-1$ и $j < 2n$, $\mathcal{L}_k u = \mathcal{L}u$ для $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$.

Теорема 1. *$\mathcal{L}_k$ является самосопряженным в $L_2(-1,1)$ положительно определенным оператором с областью определения $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$. Если $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$, то*

$$u = z(x) + \alpha\Psi(x),$$

где

$$\Psi(x) = \int_{-1}^{1} G(x,\xi)v_k(\xi)\,d\xi - \beta v_k(x),$$

β *выбрано так, чтобы*

$$\Psi^{[k]}(+0) = \Psi^{[k]}(-0) = 0, \qquad \Psi^{[j]}(+0) = \Psi^{[j]}(-0)$$

для $j \neq 2n-k-1$, $j < 2n$, $z \in W_2^{(2n)}(-1,1)$, z *удовлетворяет условиям* (2) *и* $z^{[k]}(0) = 0$.

Для $k < n$ теорема вытекает из леммы 1 и теоремы Фридрихса о существовании жесткого самосопряженного расширения. При $n \le k < 2n$ для доказательства теоремы следует установить априорные оценки в $W_2^{(2n)}(-1,0)$, $W_2^{(2n)}(1,0)$ решений рассматриваемого уравнения $\mathcal{L}_k u = f$.

Из теоремы следует, что для $0 \le k < n$ имеем $\mathcal{D}_{\mathcal{L}_k} \subset \mathring{W}_2^{(n)}(-1,1)$, более того, $u \in W_2^{(2n-k-1)}(-1,1)$ и $u^{(k)}(0) = 0$. Существует и обратный оператор $\mathcal{L}_k^{-1}$, определенный на всем $\mathcal{L}_2$. Для обобщенного решения выполнено интегральное тождество

$$[u,\varphi] \equiv \int_{-1}^{1}\left(p_0\frac{d^n u}{dx^n}\frac{d^n\varphi}{dx^n} + \ldots + p_n u\varphi\right)dx = \int_{-1}^{1}\mathcal{L}_k u\cdot\varphi\,dx = \int_{-1}^{1} f\,\varphi\,dx$$

для всех $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$, причем для каждого $f \in \mathcal{L}_2$ существует единственный элемент $u \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$, удовлетворяющий этому тождеству.

Рассмотрим теперь две задачи Коши относительно функции $u(t,x)$, принадлежащей $L_2(-1,1)$ по переменной x при каждом значении t на $[0,\infty)$:

$$-u_t = \mathcal{L}_k u, \quad u\big|_{t=0} = u_0(x), \tag{3}$$

$$-u_{tt} = \mathcal{L}_k u, \quad u\big|_{t=0} = u_0, \quad u_t\big|_{t=0} = u_1. \tag{4}$$

Если $u_i(x) \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$, то существуют решения этих задач такие, что $u(t, x) \in \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$ при каждом t и для каждого $\varphi \in \mathcal{D}_{\mathcal{L}_k}$ выполнены интегральные равенства:

для задачи (3)

$$-\int_{-1}^{1} u_t \varphi \, dx = [u, \varphi], \tag{3'}$$

для задачи (4)

$$-\int_{-1}^{1} u_{tt} \varphi \, dx = [u, \varphi]. \tag{4'}$$

Во всех рассматриваемых задачах в точке $x = 0$ „склеиваются" все производные вида $\dfrac{d^{[j]}}{dx^{[j]}}$ до порядка $2n-1$, кроме $(2n-k-1)$-й производной.

Пусть теперь точки x_l, $l = 1, \ldots, N$, таковы, что

$$-1 < x_1 < \ldots < x_N < 1.$$

Рассмотрим в каждой точке x_l граничные условия

$$\left.\frac{d^{k_{l,p}} u}{dx^{k_{l,p}}}\right|_{x=x_l} = 0, \quad 0 \le k_{l,1} < k_{l,2} < \ldots < k_{l,j_l} < n. \tag{5}$$

Оператор L с областью определения $\mathcal{D}_L$ определим следующим образом: $Lu = = \mathcal{L} u$ для $x \in (-1, x_1)$, $x \in (x_j, x_{j+1})$ при $1 < j < N-1$, $x \in (x_N, 1)$. На каждом из указанных промежутков $u \in W_2^{(2n)}$, выполняются граничные условия (2) и условия (5). Далее,

$$\left.\frac{d^{[r]}u}{dx^{[r]}}\right|_{x=x_l-0} = \left.\frac{d^{[r]}u}{dx^{[r]}}\right|_{x=x_l+0}, \quad r \ne 2n-1-k_{l,p}, \quad p = 1, \ldots, j_l.$$

Теорема 2. *Оператор L с областью определения $\mathcal{D}_L$ является самосопряженным, положительно определенным обратимым оператором. Для уравнений $u_t = Lu$, $u_{tt} = Lu$ разрешимы задачи Коши, при каждом t решения принадлежат $\mathcal{D}_L$, причем для решений выполнены соответственно интегральные тождества* (3′), (4′) *для всех* $\varphi \in \mathcal{D}_L$.

Особенно наглядны сформулированные результаты в случае $p_0 = \mathrm{const}$, $p_i(x) \equiv 0$ для $i \ge 1$. В этом случае „лагранжевы" производные $\dfrac{d^{[n]}}{dx^{[n]}}$ становятся обычными. Наличие дополнительного граничного условия $\dfrac{d^l u}{dx^l} = 0$ в точке x_i влечет за собой возможный разрыв в этой точке производной $\dfrac{d^{2n-l-1}}{dx^{2n-l-1}}$ от решений соответствующей задачи.

Отметим также, что операторы $\mathcal{L}_k^{-1}$, L^{-1} являются вполне непрерывными самосопряженными операторами, имеют полную ортонормированную систему собственных функций и свойства решений рассматриваемых задач могут быть установлены путем применения теоремы Рисса о разложимости функции по ортонормированному базису в соответствующих пространствах.

4. В качестве примера рассмотрим оператор

$$A = \frac{d^2}{dx^2},$$

заданный на функциях из $W_2^2(-1,1)$, следы которых удовлетворяют условиям

$$y(-1) = y(1) = y'(0) = 0.$$

Пространство таких функций обозначим через $\mathcal{D}(A)$. Оператор A, заданный на $\mathcal{D}(A)$, является замкнутым, симметричным, положительно определенным.

Пусть функция $z(x)$ определена следующим образом:

$$z(x) = \begin{cases} (x+1) & \text{при} \quad x < 0; \\ (x-1) & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Эта функция, очевидно, принадлежит L_2.

Нетрудно видеть, что ядро оператора A^* исчерпывается функциями вида $cz(x)$ ($c = \text{const}$) и имеет размерность 1. Область определения оператора A^* состоит из функций вида $w + \alpha y + \beta z$, где $w \in \mathcal{D}(A)$, α, β — вещественные числа,

$$y = \begin{cases} \frac{1}{6}\left[(x+1)^3 - (x+1)\right] & \text{при} \quad x < 0; \\ \frac{1}{6}\left[(x-1)^3 - (x-1)\right] & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

Функция y является решением задачи $y'' = z$, $y(-1) = y(1) = 0$. Очевидно, что в $\mathcal{D}(A^*)$ входят лишь такие функции, для которых

$$u'(-0) = u'(+0), \qquad u \in W_2^2(-1,0), \qquad u \in W_2^2(0,1).$$

Оператор A_{α_0,β_0}, определенный на прямой сумме $\mathcal{D}(A)$ и одномерного пространства функций вида $C(\alpha_0 y + \beta_0 z)$ при фиксированных α_0, β_0, $\alpha_0^2 + \beta_0^2 \neq 0$, при произвольном C, является самосопряженным оператором.

Функция φ принадлежит $\mathcal{D}(A_{\alpha_0,\beta_0})$ тогда и только тогда, когда

$$\varphi \in W_2^2(-1,0), \qquad \varphi \in W_2^2(0,1),$$

$$\left[(\alpha_0 y + \beta_0 z)'\varphi - (\alpha_0 y + \beta_0 z)\varphi'\right]_{-0}^{+0} = 0.$$

В частности, при $\alpha_0 = 1$, $\beta_0 = 0$ получаем граничные условия

$$\varphi(-0) = \varphi(+0), \qquad \varphi'(-0) = \varphi'(+0),$$

т. е. соответствующее расширение оператора A соответствует оператору $\frac{d^2}{dx^2}$, заданному на функциях из $W_2^2(-1,1) \cap \mathring{W}_2^1(-1,1)$.

Если же $\alpha_0 = 0$, $\beta_0 = 1$, то функция φ из $\mathcal{D}(A_{0,1})$ удовлетворяет условиям

$$\varphi'(-0) = \varphi'(+0), \qquad \varphi(+0) - \varphi(-0) = -2\varphi'(+0).$$

Многоточечные граничные задачи имеют многочисленные применения.

1. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Л.: Изд-во Ленинград. ун-та, 1950.
2. *Зеленяк Т. И.* Об одном классе граничных задач // Математические модели и методы их исследования: Тр. междунар. конф. – Красноярск, 2001. – **1**. – С. 264 – 267.
3. *Зеленяк Т. И., Голец Б. И.* О некоторых краевых задачах // Математические модели и методы их исследования: Тез. междунар. конф. – Красноярск, 1999.
4. *Valitsky Yu. N.* Multipoint problem for a differential equation in the Hilbert space // J. Inverse and Ill-posed Problems. – 1994. – **2**, № 4. – P. 327 – 347.
5. *Абдо С. А., Юрчук Н. И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. I. Априорные оценки // Дифференц. уравнения. – 1985. – **21**, № 3. – С. 417 – 425.
6. *Абдо С. А., Юрчук Н. И.* Многоточечные краевые задачи для некоторых дифференциально-операторных уравнений. II. Разрешимость и свойства решений // Там же. – № 5. – С. 806 – 815.
7. *Зеленяк Т. И.* О локализации собственных чисел одной спектральной задачи // Сиб. мат. журн. – 1989. – **30**, № 4. – С. 53 – 61.
8. *Покорный Ю. В.* О некоторых оценках функции Грина многоточечной краевой задачи // Мат. заметки. – 1968. – **4**, № 6. – С. 533 – 540.
9. *Пташник Б. И.* Некорректные граничные задачи для дифференциальных уравнений с частными производными. – Киев: Наук. думка, 1984. – 264 с.
10. *Теплин А. Л.* О многоточечной краевой задаче, функция Грина которой меняет знак в „шахматном" порядке // Дифференц. уравнения. – 1984. – **20**, № 11. – С. 1910 – 1911.
11. *Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г.* Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. – М.;Л.: Гостехтеоретиздат, 1950. – 359 с.
12. *Бирман М. Ш.* К теории самосопряженных расширений положительно определенных операторов // Мат. сб. – 1956. – **38(80)**, № 4. – С. 431 – 450.
13. *Friedrichs K.* Spektraltheorie halbbeschränkter Operatoren und Anwendung auf die Spektralzerlegung von Differentialoperatoren // Math. Ann. – 1934. – **109**. – S. 465 – 487.

Получено 09.04.2001,
после доработки — 04.10.2001