УДК 517.5

Б. В. Винницький, І. Б. Шепарович (Дрогобиц. пед. ун-т, Ін-т фізики і математики)

ІНТЕРПОЛЯЦІЙНІ ПОСЛІДОВНОСТІ КЛАСУ АНАЛІТИЧНИХ В ОДИНИЧНОМУ КРУЗІ ФУНКЦІЙ СКІНЧЕННОГО η-ТИПУ

We establish conditions for the existence of a solution of the interpolation problem $f(\lambda_n) = b_n$ in the class of functions f analytic ion the unit disk and such that

$$(\exists\, c_1 > 0)\ (\forall\, z, |z| < 1) : |f(z)| \le \exp\left(c_1 \eta\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right).$$

Here, $\eta : [1; +\infty) \to (0; +\infty)$ is an increasing function convex with respect to $\ln t$ on the interval $[1; +\infty)$ and such that $\ln t = o(\eta(t))$, $t \to \infty$.

Знайдено умови існування розв'язку інтерполяційної задачі $f(\lambda_n) = b_n$ у класі аналітичних в одиничному крузі функцій f, для яких

$$(\exists\, c_1 > 0)\ (\forall\, z, |z| < 1) : |f(z)| \le \exp\left(c_1 \eta\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right),$$

де $\eta : [1; +\infty) \to (0; +\infty)$ — зростаюча опукла відносно $\ln t$ на проміжку $[1; +\infty)$ функція така, що $\ln t = o(\eta(t))$, $t \to \infty$.

Нехай $\eta : [1, +\infty) \to (0, +\infty)$ — зростаюча опукла відносно $\ln t$ на проміжку $[1, +\infty)$ функція така, що $\ln t = o(\eta(t))$ при $t \to \infty$; (λ_n) — послідовність різних комплексних чисел таких, що $\lim_{n\to\infty} |\lambda_n| = 1$;

$$N(r) = \int_0^r \frac{n(t) - n(0)}{t}\, dt + n(0) \ln r, \qquad n(t) = \sum_{|\lambda_n| \le t} 1,$$

$$N_{\lambda_n}(r) = \int_0^r \frac{n_{\lambda_n}(t) - 1}{t}\, dt, \qquad n_{\lambda_n}(t) = \sum_{|z-\lambda_n| \le t} 1.$$

У роботі [1] отримано критерій існування розв'язку інтерполяційної задачі

$$f(\lambda_n) = b_n \tag{1}$$

у класі аналітичних в одиничному крузі $K_1 = \{z : |z| < 1\}$ функцій f, для яких

$$(\exists\, \tau_1 \in (0, 1))\ (\exists\, c_1 > 0)\ (\forall z \in K_1) : |f(z)| \le \exp\left(c_1 \eta^{\tau_1}\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right), \tag{2}$$

де η — додатна зростаюча функція така, що функція $\ln \eta(t)$ опукла відносно $\ln t$ на проміжку $[1, +\infty)$ і $\ln t = o(\ln \eta(t))$ при $t \to \infty$.

Метою статті є дослідження інтерполяційної задачі (1) у тоншому класі аналітичних в одиничному крузі K_1 функцій, для яких

$$(\exists\, c_1 > 0)\ (\forall\, z \in K_1) : |f(z)| \le \exp\left(c_1 \eta\left(\frac{c_1}{1-|z|}\right)\right). \tag{3}$$

Через $c_1, c_2, \ldots$ будемо позначати деякі додатні сталі.

Теорема 1. *Для того щоб для кожної послідовності* (b_n) *комплексних чисел із властивістю*

$$(\exists c_3)(\forall n): |b_n| \le \exp\left(c_3\eta\left(\frac{c_3}{1-|\lambda_n|}\right)\right) \tag{4}$$

інтерполяційна задача (1) *мала розв'язок у класі* (3), *необхідно, щоб виконувались умови*

$$(\exists c_2)\,(\forall\, r \in (0,1)): N(r) \le c_2\eta\left(\frac{c_2}{1-r}\right), \tag{5}$$

$$(\exists c_4)\ \ (\forall\, \delta \in (0;1))\ \ (\forall\, n):\ N_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) \le c_4\eta\left(\frac{c_4}{1-|\lambda_n|}\right), \tag{6}$$

і досить, щоб існувала функція L *із класу* (3), *яка має прості нулі в точках* λ_n, *така, що*

$$(\exists c_5)\,(\forall n): |(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n)| \le \exp\left(-c_5\eta\left(\frac{c_5}{1-|\lambda_n|}\right)\right). \tag{7}$$

Доведення. *Необхідність* умови (5) доводиться так само, як і необхідність відповідної умови в теоремі 2 з [1]. *Необхідність* умови (6) доведемо методом, подібним доведенню теореми Карлесона (див., наприклад, [2, 3]). Нехай $A[p,\eta]$ — простір аналітичних у крузі K_1 функцій f, для яких

$$\|f\|_p := \sup_{z\in K_1}\left\{\frac{|f(z)|}{\exp\left(p\eta\left(\frac{p}{1-|z|}\right)\right)}\right\} < \infty, \quad p \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Простори $A[p,\eta]$, $p \in \mathbb{N}$, є банаховими, причому

$$A[1,\eta] \subset A[2,\eta] \subset \ldots \subset A[p,\eta] \subset A[p+1,\eta] \subset \ldots$$

і вкладення $A[p,\eta]$ в $A[p+1,\eta]$ є цілком неперервними. Нехай $A[\eta]$ — простір аналітичних у крузі K_1 функцій f, які задовольняють умову (3), з топологією, заданою набором норм (8). Тоді $A[\eta] = \bigcup_p A[p,\eta]$ є строгою індуктивною границею послідовності просторів $A[p,\eta]$ (див. [4–6]). Аналогічно, нехай $B[p,\eta]$ — простір послідовностей $\beta = (b_n)$ таких, що

$$\|\beta\|_p := \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{|b_n|}{\exp\left(p\eta\left(\frac{p}{1-|\lambda_n|}\right)\right)}\right\} < \infty, \quad p \in \mathbb{N}, \tag{9}$$

а $B[\eta] = \bigcup_p B[p,\eta]$ — простір послідовностей (b_n), які задовольняють умову (4) з топологією, заданою нормами (9). Тоді $B[\eta]$ є строгою індуктивною границею цілком неперервно вкладених просторів

$$B[1,\eta] \subset B[2,\eta] \subset \ldots \subset B[p,\eta] \subset B[p+1,\eta] \subset \ldots.$$

Припустимо, що інтерполяційна задача (1) має розв'язок у просторі $A[\eta]$. Тоді для послідовностей $\beta_k = (b_{n,k})$, де $b_{n,k} = 0$ при $k \ne n$ і $b_{n,n} = 1$, існує послідовність функцій f_k, які задовольняють умову (3), така, що

$$f_k(\lambda_n) = b_{n,k}.$$

Покажемо, що функції f_k можна вибрати так, що

$$(\exists\, c_1)\,(\exists\, p \in \mathbb{N})\,(\forall k)\,(\forall z \in K_1): |f_k(z)| \le c_1 \exp\left(p\eta\left(\frac{p}{1-|z|}\right)\right).$$

Для цього розглянемо оператор I, який кожній функції $f \in A[\eta]$ ставить у відповідність послідовність її значень у точках λ_n:

$$I(f) = (f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n), \ldots) =: \beta.$$

Оператор I, який відображає $A[\eta]$ на $B[\eta]$, є неперервним. Справді, як відомо [4, 5], оператор є неперервним тоді і тільки тоді, коли він переводить обмежену множину в обмежену. Множина $E \in A[\eta]$ є обмеженою тоді і тільки тоді, коли

$$(\exists\, c_7)\,(\exists\, q \in \mathbb{N})\,(\forall f \in E): \|f\|_q \le c_7.$$

Тому із співвідношень

$$(\forall q \in \mathbb{N})\,(\forall f \in A_1[\eta]):$$

$$\|I(f)\|_q = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{|b_n|}{\exp\left(q\eta\left(\frac{q}{1-|\lambda_n|}\right)\right)}\right\} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left\{\frac{|f(\lambda_n)|}{\exp\left(q\eta\left(\frac{q}{1-|\lambda_n|}\right)\right)}\right\} \le$$

$$\le \sup_{z\in K_1}\left\{\frac{|f(z)|}{\exp\left(q\eta\left(\frac{q}{1-|z|}\right)\right)}\right\} \le \|f\|_q$$

випливає неперервність I. Розглянемо фактор-простір $A[\eta]/\ker I$ з набором норм

$$\|f\|_p^* = \inf_{L\in\ker I}\|f+L\|_p.$$

З означення видно, що $\|f\|_p^* \le \|f\|_p$. Фактор-простір успадковує властивості простору, що його породив [4, 5]. Нехай I^* — оператор, який відображає простір $A[\eta]/\ker I$ на $B[\eta]$ за правилом

$$I^*(f) = (f(\lambda_1), \ldots, f(\lambda_n), \ldots) =: \beta.$$

Це відображення є взаємно однозначним і неперервним. Тому за теоремою Банаха–Гротендіка [4, 5, 7] обернений до I^* оператор є неперервним, а тому й обмеженим. Таким чином,

$$(\forall\, q \in \mathbb{N})\,(\exists\, p \in \mathbb{N})\,(\exists\, c_8)\,(\forall k): \|f_k\|_p^* \le \left\|I^{*-1}(\beta_k)\right\|_p \le c_8\|\beta_k\|_q,$$

тобто

$$(\exists\, q \in \mathbb{N})\,(\exists\, c_9)\,(\forall k): \inf_{L\in\ker I}\|f_k+L\|_q = \|f_k\|_q^* \le c_9.$$

З означення інфімуму випливає, що існує функція $L_k \in \ker I$ така, що

$$\|f_k + L_k\|_q \le c_9 + 1.$$

Отже, існує функція $F_k = f_k + L_k$ така, що

$$(\exists\, c_1)\,(\exists\, q \in \mathbb{N})\,(\forall k): \|F_k\|_q \le c_1.$$

Таким чином, існують функції F_k, аналітичні в одиничному крузі, такі, що $F_k(\lambda_n) = b_{n,k}$ і

$$(\exists\, c_1)\,(\exists\, p \in \mathbb{N})\,(\forall k)\,(\forall\, z \in K_1): |F_k(z)| \le c_1 \exp\left(p\eta\left(\frac{p}{1-|z|}\right)\right). \qquad (10)$$

Далі, як і в [8], застосуємо формулу Йєнсена до функції F_k для кругів $\{z : |z-\lambda_k| = \delta(1-|\lambda_k|)\}$. Оскільки, відповідно до вибору β_k, $F_k(\lambda_k) = 1$, $F_k(\lambda_n) = 0$, $n \ne k$, і кількість нулів функції F_k у крузі $|z-\lambda_k| \le t$ більша або рівна $n_{\lambda_k}(t) - 1$, то

$$\ln|F_k(\lambda_k)| \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|F_k\left(\lambda_k + \delta(1-|\lambda_k|)e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi - \int_0^{\delta(1-|\lambda_k|)} \frac{n_{\lambda_k}(t)-1}{t}\,dt.$$

Таким чином, виходячи з (10), отримуємо

$$(\exists\, c_4)\,(\forall\, \delta \in (0;1))\,(\forall k):$$

$$N_{\lambda_k}(\delta(1-|\lambda_k|)) \le \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \ln\left|F_k\left(\lambda_k + \delta(1-|\lambda_k|)e^{i\varphi}\right)\right| d\varphi \le c_4\eta\left(\frac{c_4}{1-|\lambda_k|}\right),$$

і необхідність умови (6) доведено.

Достатність. Нехай L — деяка аналітична в одиничному крузі функція, яка має прості нулі в точках λ_n і задовольняє умову (3). Тоді виконується умова (6), що випливає з нерівності Йєнсена $N(r) \le \ln M_L(r) + O(1)$, де $M_L(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$. Із властивостей функції η випливає, що функція $c_0\eta(c_0 t)$, де $c_0 \le 4(\Delta_0 c_2 + c_3 + c_5)$, $\Delta_0 > 1$, теж є опуклою відносно $\ln t$, і оскільки $\ln t = o(\eta(t))$ при $t \to +\infty$, то [9] існує ціла функція ψ така, що

$$\ln M_\psi(t) = (1+o(1))\,c_0\eta(c_0 t), \qquad t \to +\infty.$$

А оскільки

$$\mu_\psi(t) \le M_\psi(t) \le \left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)\mu_\psi((1+\varepsilon)t), \quad \varepsilon > 0,$$

де $\mu_\psi(t) = \max\left\{|\psi_n| t^n\right\}$ і $\psi_n = \psi^{(n)}(0)/n!$, то

$$\begin{aligned} \mu_\psi(t) &\le \exp\left(2c_0\eta(c_0 t)\right), \quad t \ge t_0, \\ \mu_\psi(t) &\ge \exp\left(\frac{c_0}{4}\eta\left(\frac{c_0 t}{2}\right)\right), \quad t \ge t_0. \end{aligned} \qquad (11)$$

Виберемо послідовність натуральних чисел (s_n) так, щоб

$$\kappa_{s_n}(\hat{\psi}) \le \delta_n < \kappa_{s_n+1}(\hat{\psi}), \qquad \delta_n = \frac{1}{1-|\lambda_n|},$$

де $\hat{\psi}$ — мажоранта Ньютона функції ψ. Тоді [10]

$$\mu_\psi(\delta_n) = \hat{\psi}_{s_n}\delta_n^{s_n}, \qquad \mu_\psi(t) \ge \hat{\psi}_{s_n} t^{s_n}, \qquad \psi_n = \frac{\psi^{(n)}(0)}{n!}. \qquad (12)$$

Покажемо, що функція

$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n L(z)}{(z-\lambda_n)L'(\lambda_n)}\left(\frac{1-|\lambda_n|^2}{1-\bar{\lambda}_n z}\right)^{s_n}$$

задовольняє умову (3). Оскільки $\ln t + \ln \eta(t) = o(\eta(t)) + o(\eta(t)) = o(\eta(t))$, $t \to +\infty$, то

$$(\forall\, c > 0)\,(\exists\, t_2)\,(\forall t \ge t_2):\; e^{c\eta(t)} \ge t\eta(t).$$

Тому з нерівностей (11), (12), умов (3)–(5), (7) і використаного в [1] співвідношення

$$\max_{|z|=r}\left|\frac{L(z)}{z-\lambda_n}\right| \le \frac{8}{1-r}\,\frac{M_L((r+1)/2)}{r+|\lambda_n|} \le \frac{c_{10}}{1-r}M_L\left(\frac{r+1}{2}\right)$$

отримуємо

$$|f(z)| \le \frac{c_{10}}{1-r}M_L\left(\frac{r+1}{2}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|b_n|}{|(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n)|}\,\frac{\hat{\psi}_{s_n}(2/(1-r))^{s_n}}{\hat{\psi}_{s_n}\left((1-|\lambda_n|)^{-1}\right)^{s_n}} \le$$

$$\le \frac{c_{10}}{1-r}\exp\left(c_1\eta\left(\frac{2c_1}{1-r}\right)+2c_0\eta\left(\frac{2c_0}{1-r}\right)\right)\times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(c_3\eta\left(\frac{c_3}{1-|\lambda_n|}\right)+c_6\eta\left(\frac{c_6}{1-|\lambda_n|}\right)-\frac{c_0}{4}\eta\left(\frac{c_0/2}{1-|\lambda_n|}\right)\right) \le$$

$$\le \exp\left(c_{11}\eta\left(\frac{c_{11}}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\exp\left(-\Delta_0 c_2\eta\left(\frac{2c_2}{1-|\lambda_n|}\right)\right) \le$$

$$\le \exp\left(c_{11}\eta\left(\frac{c_{11}}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\frac{2c_2}{1-|\lambda_n|}\eta\left(\frac{2c_2}{1-|\lambda_n|}\right)\right)^{\Delta_0}} \le$$

$$\le \exp\left(c_{11}\eta\left(\frac{c_{11}}{1-r}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\Delta_0}},$$

тому що

$$n \le n(|\lambda_n|) \le \frac{2}{1-|\lambda_n|}N\left(\frac{1+|\lambda_n|}{2}\right) \le \frac{2c_2}{1-|\lambda_n|}\eta\left(\frac{2c_2}{1-|\lambda_n|}\right).$$

Отже, f задовольняє умову (3), і, очевидно, умову (1).

Теорему 1 доведено.

Теорема 2. *Нехай* (λ_n) *є послідовністю нулів деякої функції* L *з класу* (3). *Тоді для того щоб для кожної послідовності* (b_n) *комплексних чисел із властивістю* (4) *інтерполяційна задача* (1) *мала розв'язок у класі* (3), *необхідно і досить, щоб виконувалась одна з умов* (6), (7).

Доведення. Досить показати, щоб умови (6) і (7) є еквівалентними, а це випливає з формули Йенсена [11], застосованої до функції L та кругів $\{z : |z-\lambda_n| = \delta(1-|\lambda_n|)\}$:

$$\ln|\delta(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n)| + \int_0^{\delta(1-|\lambda_n|)}\frac{n_{\lambda_n}(t)-1}{t}dt =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\ln\left|L\left(\lambda_n+\delta(1-|\lambda_n|)e^{i\psi}\right)\right|d\psi.$$

Справді, за першою основною теоремою Неванлінни теорії розподілу значень [11, с. 23]

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|\ln\left|L\left(\lambda_n+\delta(1-|\lambda_n|)e^{i\psi}\right)\right|\right|d\psi \le 2T(|\lambda_n|+\delta(1-|\lambda_n|), L) + c_{12},$$

де $T(r, L)$ — неванліннівська характеристика функції L. Але $T(r, L) \le$ $\le \ln M_L(r)$. Таким чином, з (2) отримуємо

$$\ln|(1-|\lambda_n|)L'(\lambda_n)| = -N_{\lambda_n}(\delta(1-|\lambda_n|)) + O\left(\eta^{\tau_1}\left(\frac{c_{12}}{1-|\lambda_n|}\right)\right), \quad n\to\infty,$$

і теорему 2 доведено.

Теорему 2 можна розглядати як аналог теореми Хеймана [12] для одиничного круга.

1. *Винницький Б. В., Шепарович І. Б.* Про інтерполяційні послідовності одного класу функцій, аналітичних в одиничному крузі // Укр. мат. журн. – 2001. – **53**, №7. – С. 879–886.
2. *Гарнет Дж.* Ограниченные аналитические функции. – М.: Мир, 1984. – 470 с.
3. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 310 с.
4. *Робертсон А., Робертсон В.* Топологические векторные пространства. – М.: Мир, 1967. – 255 с.
5. *Себаштьян-и-Силва Ж.* О некоторых классах локально выпуклых пространств, важных в приложении // Математика. – 1957. – **1**, №1. – С. 60–77.
6. *Taylor B.* A seminorm topology for some (*DF*)-spaces of entire functions // Duke Math. J. – 1914. – **38**. – P. 379–385.
7. *Напалков В. В.* Уравнения свертки в многомерных пространствах. – М.: Наука, 1982. – 240 с.
8. *Братищев А. В.* Последовательности с конечной максимальной угловой плотностью и некоторые приложения. – Ростов-на-Дону, 1987. – 91 с. – Деп. в ВИНИТИ, № 8703-В87.
9. *Clunie J.* On integral functions having prescribed asymptotic grows. I // Can. J. Math. – 1965. – **17**, № 3. – P. 396–404.
10. *Полиа Г., Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа: В. 2 т. – М.: Наука, 1978. – Т. 2. – 432 с.
11. *Гольдберг А. А., Островский И. И.* Распределение значений мероморфных функций. – М.: Наука, 1970. – 591 с.
12. *Heyman R.* Interpolation of infinite order entire functions // Rev. mat. iber. – 1994. – **10**, № 3. – P. 581–626.

Одержано 24.09.2002