УДК 517.9

В. Д. Кошманенко, Г. В. Тугай (Ін-т математики НАН України, Київ)

ПРО СТРУКТУРУ РЕЗОЛЬВЕНТИ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНОГО ОПЕРАТОРА, ЩО РОЗВ'ЯЗУЄ ЗАДАЧУ НА ВЛАСНІ ЗНАЧЕННЯ*

We investigate the structure of resolvent of a singularly perturbed operator of finite rank solving the problem of eigenvalues.

Досліджується структура резольвенти сингулярно збуреного оператора скінченного рангу, який розв'язує задачу на власні значення.

1. Вступ. Нехай у комплексному сепарабельному гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ задано необмежений самоспряжений оператор A з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$.

Оператор $\tilde{A} \neq A$ називається [1 – 3] (чисто) сингулярно збуреним відносно A, якщо множина

$$\mathfrak{D} = \left\{\varphi \in \mathfrak{D}(A) \cap \mathfrak{D}(\tilde{A}) \colon A\varphi = \tilde{A}\varphi\right\}$$

є щільною в $\mathcal{H}$. Зрозуміло, що A і $\tilde{A}$ мають спільний симетричний оператор $\dot{A} = A \restriction \mathfrak{D} = \tilde{A} \restriction \mathfrak{D}$ із нетривіальними індексами дефекту $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = \dim \operatorname{Ker}(\dot{A} \pm i)^* \neq \neq 0$. $\tilde{A}$ називається сингулярно збуреним оператором скінченного рангу, якщо $\mathbf{n}^{\pm}(\dot{A}) = n < \infty$; позначаємо $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^n(A)$. У цьому випадку різниця резольвент

$$(\tilde{A} - z)^{-1} - (A - z)^{-1} = B(z), \qquad \operatorname{Im} z > 0,$$

є обмеженим оператором рангу n.

Ми досліджуємо структуру $B(z)$ за умови, що оператор $\tilde{A}$ розв'язує задачу на власні значення

$$\tilde{A}\psi_i = E_i \psi_i, \quad E_i \in \mathbb{R}, \quad \psi_i \notin \mathfrak{D}(A), \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

для довільно заданих дійсних чисел E_i та ортонормованих векторів ψ_i. При цьому ми використовуємо резольвентну форму задання оператора $\tilde{A} \equiv A_n$, визначену рекурентним способом [4, 5]:

$$(A_i - z)^{-1} = (A_{i-1} - z)^{-1} + b_i^{-1}(z)(\cdot, \eta_i(\bar{z}))\eta_i(z), \quad i = 1, \ldots, n,$$

де

$$A_0 \equiv A, \quad \eta_i(z) := (A_{i-1} - E_i)(A_{i-1} - z)^{-1}\psi_i, \quad b_i(z) := (E_i - z)(\psi_i, \eta_i(\bar{z})).$$

Основним результатом роботи є теорема 2, в якій встановлено формулу для коефіцієнтної функції $b_n(z)$ у вигляді відношення детермінантів матриць, побудованих за наперед заданими E_i та ψ_i.

2. Попередні відомості. У випадку регулярного збурення рангу один безпосередньо перевіряється, що оператор $\tilde{A}$ розв'язує задачу $\tilde{A}\psi = E\psi$, $\psi \in \in \mathfrak{D}(A)$, якщо він має вигляд

$$\tilde{A} = A + \alpha(\cdot, \omega)\omega, \quad \omega = (A - E)\psi, \quad \alpha = -\frac{1}{(\psi, \omega)}.$$

При цьому резольвента збуреного оператора $\tilde{R}(z) = (\tilde{A} - z)^{-1}$ є такою:

* Частково підтримано проектами DFG 436 UKR 113/67 та INTAS 00-257.

$$\tilde{R}(z) = R(z) + b^{-1}(z)(\cdot, R(\bar{z})\omega)R(z)\omega, \qquad R(z) = (A-z)^{-1},$$

де $b(z) = -\alpha^{-1} - (\omega, R(\bar{z})\omega) = (E-z)(\psi, (A-E)R(\bar{z})\psi)$.

Аналогічне зображення резольвенти має місце і у випадку сингулярного збурення рангу один (пор. з [4, 5]).

Теорема 1. *Нехай A — необмежений самоспряжений оператор в $\mathcal{H}$, E — дійсне число, $\psi \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$. Тоді існує єдиний сингулярно збурений оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$ рангу один, який розв'язує задачу*

$$\tilde{A}\psi = E\psi. \tag{2}$$

При цьому його резольвента $\tilde{R}(z)$ має вигляд

$$\tilde{R}(z) = R(z) + b^{-1}(z)(\cdot, \eta(\bar{z}))\eta(z), \tag{3}$$

де

$$\eta(z) := (A-E)R(z)\psi, \tag{4}$$

$$b(z) = (E-z)(\psi, \eta(\bar{z})). \tag{5}$$

Доведення. Покажемо, що формули (3)–(5) визначають резольвенту деякого оператора $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$. З цією метою перевіримо спочатку, що $\tilde{R}(z)$ задовольняє тотожність Гільберта

$$\tilde{R}(z) - \tilde{R}(\xi) = (z-\xi)\tilde{R}(z)\tilde{R}(\xi), \qquad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad \operatorname{Im} \xi \neq 0. \tag{6}$$

Підставляючи (3) в (6) і використовуючи тотожність Гільберта для резольвенти оператора A, одержуємо

$$\begin{aligned} b^{-1}(z)(\cdot, \eta(\bar{z}))\eta(z) - b^{-1}(\xi)\big(\cdot, \eta(\bar{\xi})\big)\eta(\xi) = \\ = (z-\xi)b^{-1}(\xi)\big(\cdot, \eta(\bar{\xi})\big)R(z)\eta(z) + (z-\xi)b^{-1}(z)\big(\cdot, R(\bar{\xi})\eta(\bar{z})\big)\eta(z) + \\ + (z-\xi)b^{-1}(z)b^{-1}(\xi)\big(\cdot, \eta(\bar{\xi})\big)(\eta(\xi), \eta(\bar{z}))\eta(z). \end{aligned} \tag{7}$$

Внаслідок (4) та (5) виконується співвідношення

$$b(z) - b(\xi) = (\xi - z)(\eta(\xi), \eta(\bar{z})). \tag{8}$$

Завдяки (8) вираз (7) перетворюється у тотожність, еквівалентну тотожності Гільберта для операторної функції $\tilde{R}(z)$. Отже, $\tilde{R}(z)$ є псевдорезольвентою. З (4) та (5) також випливає

$$\overline{b}(z) = b(\bar{z}). \tag{9}$$

Тому маємо

$$(\tilde{R}(z))^* = R(\bar{z}) + b^{-1}(\bar{z})(\cdot, \eta(z))\eta(\bar{z}) = \tilde{R}(\bar{z}). \tag{10}$$

Покажемо, що

$$\operatorname{Ker} \tilde{R}(z) = \{0\}, \qquad \operatorname{Im} z \neq 0. \tag{11}$$

Дійсно, для усіх $0 \neq f \perp \eta(\bar{z})$

$$\tilde{R}(z)f = (A-z)^{-1}f \neq 0,$$

а для вектора $\eta(\bar{z})$

$$\tilde{R}(z)\eta(\bar{z}) = (A-z)^{-1}\eta(\bar{z}) + b^{-1}(z)\|\eta(\bar{z})\|^2\eta(z) \neq 0,$$

оскільки $(A-z)^{-1}\eta(\bar{z}) \in \mathfrak{D}(A)$, $(A-z)^{-1}\eta(\bar{z}) \neq 0$ і $\eta(z) \notin \mathfrak{D}(A)$, тому що $\psi \in \mathcal{H} \setminus \mathfrak{D}(A)$ (див. (4)).

Таким чином, з (6), (10) та (11) випливає, що $\tilde{R}(z)$ є резольвентою деякого самоспряженого оператора $\tilde{A}$ (див. [6, с. 533]).

Насправді $\tilde{A}$ є сингулярно збуреним оператором рангу один по відношенню до A, тобто $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$. Щоб у цьому переконатися, розглянемо підпростір $\mathcal{N}_z = \{c\eta(z) : c \in \mathbb{C}\}$ і визначимо $\mathcal{M}_z = \mathcal{H} \ominus \mathcal{N}_z$ та $\mathfrak{D} = R(z)\mathcal{M}_z \equiv \tilde{R}(z)\mathcal{M}_z$. За побудовою оператори A та $\tilde{A}$ збігаються на $\mathfrak{D}$. Покажемо, що множина $\mathfrak{D}$ є щільною в $\mathcal{H}$. Припустимо протилежне, тобто що $\mathfrak{D}^{\mathrm{cl}} \neq \mathcal{H}$, де cl позначає замикання. Тоді існує вектор $0 \neq \varphi \in \mathcal{H}$ такий, що

$$0 = (\mathfrak{D}, \varphi) = (R(z)\tilde{R}(z)\mathcal{M}_z, \varphi) = (\mathcal{M}_z, R(\bar{z})\varphi).$$

З останнього виразу випливає, що $R(\bar{z})\varphi \in \mathcal{N}_z$, а також $R(\bar{z})\varphi \in \mathfrak{D}(A)$. А це є суперечністю, тому що $\mathcal{N}_z \cap \mathfrak{D}(A) = \{0\}$, оскільки усі вектори $\eta(z) \in \mathcal{N}_z$ з точністю до константи мають вигляд $\eta(z) = (A-E)R(z)\psi = \psi + (z-E)R(z)\psi$, де $\psi \notin \mathfrak{D}(A)$, а $R(z)\psi \in \mathfrak{D}(A)$.

Тепер, використовуючи (3) – (5), при безпосередньому підрахунку отримуємо

$$\tilde{R}(z)\psi = \frac{1}{E-z}\psi.$$

Отже, оператор $\tilde{A}$, визначений співвідношеннями (3) – (5), належить множині $\mathcal{P}_s^1(A)$ і розв'язує задачу (2).

Залишилось переконатися в єдиності такого оператора в класі $\mathcal{P}_s^1(A)$. Дійсно, нехай оператор $\tilde{A} \in \mathcal{P}_s^1(A)$ розв'язує задачу (2). Тоді, оскільки $\tilde{A}$ є самоспряженим розширенням симетричного оператора $\dot{A}$, для його резольвенти справджується формула Крейна (3), де скалярна функція $b(z)$ задовольняє співвідношення (8) та (9), а для векторної функції $\eta(z)$ із значеннями в $\mathcal{N}_{\bar{z}}$ виконується рівність

$$\eta(z) = (A-\xi)(A-z)^{-1}\eta(\xi), \qquad \operatorname{Im} z \neq 0, \quad \operatorname{Im}\xi \neq 0.$$

Насправді, з огляду на (2) легко показати, що ці функції мають зображення відповідно (4) та (5)

Теорему 1 доведено.

З доведення цієї теореми випливає цікавий наслідок. Позначимо через Λ_ψ множину всіх дійсних чисел λ, які не є власними значеннями для оператора A і такі, що вектор ψ з теореми 1 належить області визначення оператора $(A-\lambda)^{-1}$.

Наслідок. *Для кожного $\lambda \in \Lambda_\psi$ оператор $\tilde{A}'$, визначений формулою* (3), *в якій функцію $b(z)$ замінено на $b'(z) = (\lambda - z)(\psi, \eta(\bar{z}))$, розв'язує задачу $\tilde{A}'\psi' = \lambda\psi'$, де $\psi' = (A-E)(A-\lambda)^{-1}\psi$. Усі оператори $\tilde{A}'$, які відповідають різним $\lambda \in \Lambda_\psi$, є самоспряженими розширеннями одного і того ж симетричного оператора $\dot{A}$, що виникає при доведенні теореми* 1.

Зауважимо, що у загальному випадку множина Λ_ψ не є порожньою, що випливає, наприклад, з основного результату роботи [8].

3. Резольвента сингулярно збуреного оператора. Мета цього пункту — довести формулу (13) з наступної теореми.

Теорема 2. *Нехай A — необмежений самоспряжений оператор з областю визначення $\mathfrak{D}(A)$ в гільбертовому просторі $\mathcal{H}$ і $\tilde{A} \equiv A_n \in \mathcal{P}_s^n(A)$ — сингулярне збурення рангу n оператора A. Припустимо, що A_n розв'язує задачу на власні значення*

$$A_n \psi_k = E_k \psi_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

для заданих $E_k \in \mathbb{R}$ та будь-якої ортонормованої послідовності векторів ψ_k таких, що $\operatorname{span}\{\psi_k\}_{k=1}^n \cap \mathcal{D}(A) = \{0\}$.

Тоді резольвента $\tilde{R}(z) \equiv R_n(z)$ оператора $\tilde{A}$ зображується у вигляді

$$R_n(z) = R_{n-1}(z) + b_n^{-1}(z)(\cdot, \eta_n(\bar{z}))\eta_n(z), \tag{12}$$

де $R_0(z) = (A - z)^{-1}$ та $R_{n-1}(z) = (A_{n-1} - z)^{-1}$ — резольвенти самоспряжених операторів, побудованих рекурентним чином за формулою (12) *з*

$$\eta_j(z) = (A_{j-1} - E_j) R_{j-1}(z) \psi_j, \quad j = 1, \ldots, n,$$

$$b_j(z) = (E_j - z)\big(\psi_j, \eta_j(\bar{z})\big), \quad j = 1, \ldots, n.$$

При цьому

$$b_n(z) = \frac{d_n(z)}{d_{n-1}(z)} \tag{13}$$

з $d_0(z) = 1$, $d_n(z) = \det M_n(z)$, де матриці $M_n(z) = (c_{ij}(z))_{i,j=1}^n$ визначаються по E_k та ψ_k згідно з формулами

$$c_{ij}(z) = \begin{cases} (E_i - z)\big(\psi_i, (A - E_j) R(\bar{z}) \psi_j\big), & i \geq j, \\ (E_i - z)\big(\psi_j, (A - E_j) R(\bar{z}) \psi_i\big), & i < j. \end{cases}$$

Доведення. Той факт, що формула (12) визначає сингулярне збурення рангу n самоспряженого оператора A, випливає з теореми 1 і доведений в [4, 5].

Слід довести лише справедливість формули (13). Для цього використовуємо метод математичної індукції. У випадку $n = 1$ (див. теорему 1)

$$b_1(z) = (E_1 - z)(\psi_1, \eta_1(\bar{z})) \equiv \frac{d_1(z)}{d_0(z)} \equiv c_{11}(z).$$

Нехай A_2 — збурення рангу один оператора A_1, для якого

$$A_2 \psi_2 = E_2 \psi_2.$$

Тоді згідно з теоремою 1 маємо

$$R_2(z) = R_1(z) + b_2^{-1}(z)(\cdot, \eta_2(\bar{z}))\eta_2(z),$$

де

$$\eta_2(z) = (A_1 - E_2) R_1(z) \psi_2,$$

$$b_2(z) = (E_2 - z)(\psi_2, \eta_2(\bar{z})) = (E_2 - z)(\psi_2, \ \psi_2 + (\bar{z} - E_2) R_1(\bar{z}) \psi_2) =$$

$$= (E_2 - z)\Big(\psi_2, \ \psi_2 + (\bar{z} - E_2)\Big(R(\bar{z})\psi_2 + b_1^{-1}(\bar{z})(\psi_2, \eta_1(z))\eta_1(\bar{z})\Big)\Big) =$$

$$= (E_2 - z)\Big(\psi_2, \ (A - E_2) R(\bar{z})\psi_2 + (\bar{z} - E_2) b_1^{-1}(\bar{z})(\psi_2, \eta_1(z))\eta_1(\bar{z})\Big) =$$

$$= c_{22}(z) - \frac{c_{12}(z)c_{21}(z)}{c_{11}(z)} = \frac{d_2(z)}{d_1(z)},$$

що доводить формулу (13) при $n = 2$. У загальному випадку розглянемо самоспряжений оператор A_n як збурення рангу один оператора A_{n-1}. Зрозуміло, що його резольвента має вигляд (12). Зобразимо резольвенту оператора A_n через резольвенту оператора A:

$$R_n(z) = R_{n-2}(z) + b_{n-1}^{-1}(z)(\cdot, \eta_{n-1}(\bar{z}))\eta_{n-1}(z) + b_n^{-1}(z)(\cdot, \eta_n(\bar{z}))\eta_n(z) = \ldots$$

$$\ldots = R(z) + \sum_{k=1}^{n} b_k^{-1}(z)(\cdot, \eta_k(\bar{z}))\eta_k(z), \tag{14}$$

$$b_n(z) =$$

$$= (E_n - z)\left((\psi_n, (A - E_n)R(z)\psi_n) + (z - E_n)\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{-1}(z)(\psi_n, \eta_k(\bar{z}))\overline{(\psi_n, \eta_k(z))}\right).$$

Тепер будемо доводити, що

$$b_n(z) = \frac{d_n(z)}{d_{n-1}(z)}.$$

З цією метою розглянемо добутки $(E_n - z)(\psi_n, \eta_k(\bar{z}))$. Зокрема, для $\eta_1(z)$, $\eta_2(z)$ маємо

$$(E_n - z)(\psi_n, \eta_1(\bar{z})) = c_{n1}(z),$$

$$(E_n - z)\overline{(\psi_n, \eta_1(z))} = c_{1n}(z),$$

$$(E_n - z)(\psi_n, \eta_2(\bar{z})) = (E_n - z)(\psi_n, (A - E_2)R(\bar{z})\psi_2) -$$

$$-(E_n - z)(E_2 - z)b_1^{-1}(z)(\psi_n, \eta_1(\bar{z}))\overline{(\psi_2, \eta_1(z))} = \frac{1}{d_1(z)}\det\begin{pmatrix} c_{11}(z) & c_{12}(z) \\ c_{n1}(z) & c_{n2}(z) \end{pmatrix},$$

аналогічно

$$(E_n - z)\overline{(\psi_n, \eta_2(z))} = \frac{1}{d_1(z)}\det\begin{pmatrix} c_{11}(z) & c_{1n}(z) \\ c_{21}(z) & c_{2n}(z) \end{pmatrix}.$$

Припустимо за індукцією, що аналогічні співвідношення виконуються для усіх η_k, $k \le n - 1$:

$$(E_n - z)(\psi_n, \eta_k(\bar{z})) = \frac{M_{k-1}^{n,1}(z)}{d_{k-1}(z)}, \tag{15}$$

$$(E_n - z)\overline{(\psi_n, \eta_k(z))} = \frac{M_{k-1}^{1,n}(z)}{d_{k-1}(z)}, \tag{16}$$

де $M_k^{i,j}(z)$ — мінор матриці $M_n(z)$, отриманий на перетині $k-1$ перших і i-го рядків та $k-1$ перших і j-го стовпчиків. За індукцією припускаємо, що

$$b_k(z) = \frac{d_k(z)}{d_{k-1}(z)}, \qquad 1 \le k \le n - 1. \tag{17}$$

Тоді з (14) – (17) отримуємо

$$b_n(z) = c_{nn}(z) - (E_n - z)^2 \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_{i-1}(z)}{d_i(z)} (\psi_n, \eta_i(\bar{z})) \overline{(\psi_n, \eta_i(z))} =$$

$$= c_{nn}(z) - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{d_{i-1}(z)}{d_i(z)} \frac{M_{i-1}^{n,i}(z)}{d_{i-1}(z)} \frac{M_{i-1}^{i,n}(z)}{d_{i-1}(z)}.$$

Застосовуючи лему (див. нижче) $n-1$ разів до правої частини останнього виразу, одержуємо

$$(E_n - z)(\psi_n, \eta_n(\bar{z})) =$$

$$= c_{nn}(z) - \frac{c_{n1}(z) c_{1n}(z)}{c_{11}(z)} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{d_{i-1}(z)}{d_i(z)} \frac{M_{i-1}^{n,i}(z)}{d_{i-1}(z)} \frac{M_{i-1}^{i,n}(z)}{d_{i-1}(z)} =$$

$$= \frac{M_1^{n,n}(z)}{d_1(z)} - \sum_{i=2}^{n-1} \frac{M_{i-1}^{n,i}(z)}{d_i(z)} \frac{M_{i-1}^{i,n}(z)}{d_{i-1}(z)} = \ldots = \frac{d_n(z)}{d_{n-1}(z)},$$

що й доводить формулу (13).

Теорему 2 доведено.

Для формулювання леми введемо наступні позначення:

$d_p = \det M$, $M = \{ c_{ij} \mid 1 \le i, j \le p \}$ — матриця розмірності $p \times p$;

d_m, $m < p$, — мінор матриці M, отриманий на перетині m перших рядків та стовпчиків;

$d_p^{i,j}$, $1 \le i,\ j \le p$, — визначник матриці, отриманої з M викреслюванням j-го рядка та i-го стовпчика.

Лема. *Нехай* $M = \{ c_{ij} \mid 1 \le i, j \le k+1 \}$ — *комплекснозначна матриця розмірності* $(k+1) \times (k+1)$. *Тоді*

$$d_{k+1} d_{k-1} = d_{k+1}^{k+1,k+1} d_{k+1}^{k,k} - d_{k+1}^{k+1,k} d_{k+1}^{k,k+1}. \tag{18}$$

Зазначимо, що рівність (18) є частинним випадком відомої детермінантної тотожності Сільвестра [8, с. 48]. Цей частинний випадок легко довести методом математичної індукції.

1. *Albeverio S., Koshmanenko V.* Singular rank one perturbations of self-adjoint operators and Krein theory of self-adjoint extensions // Potent. Anal. – 1999. – **11**. – P. 279–287.
2. *Koshmanenko V. D.* Towards the rank-one singular perturbations of self-adjoint operators // Ukr. Math. J. – 1991. – **43**, № 11. – P. 1559–1566.
3. *Кошманенко В. Д.* Сингулярные билинейные формы в теории возмущений самосопряженных операторов. – Киев: Наук. думка, 1993. – 176 с.
4. *Koshmanenko V.* A variant of inverse negative eigenvalues problem in singular perturbation theory // Meth. Funct. Anal. and Top. – 2002. – **8**, № 1. – P. 49–69.
5. *Дудкін М. Є., Кошманенко В. Д.* Про точковий спектр самоспряжених операторів, що виникає при сингулярних збуреннях скінченного рангу // Укр. мат. журн. – 2003. – **55**, № 9. – С. 1269–1276.
6. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1972. – 740 с.
7. *Albeverio S., Dudkin M., Koshmanenko V.* Rank one singular perturbations with dual eigen-values pair // Lett. Math. Phys. – 2003. – **63**. – P. 219–228.
8. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 575 с.

Одержано 11.09.2003