УДК 512.552.12

О. М. Романів (Львів. нац. ун-т)

ЕЛЕМЕНТАРНА РЕДУКЦІЯ МАТРИЦЬ НАД ПРАВИМИ 2-ЕВКЛІДОВИМИ КІЛЬЦЯМИ

We introduce the concept of a noncommutative (right) 2-Euclidean ring. We prove that the right 2-Euclidean ring is a right Hermite ring, a right Bezout ring, and a GE_n-ring. We show that an arbitrary right unimodular string of length not less than 3 over the right Bezout ring of stable rank 2 possesses the elementary diagonal reduction. We prove that the right Bezout ring of stable rank 1 is a right 2-Euclidean ring.

Введено поняття некомутативного (правого) 2-евклідового кільця. Доведено, що праве 2-евклідове кільце є правим кільцем Ерміта, правим кільцем Безу та GE_n-кільцем. Показано, що довільний правий унімодулярний рядок довжиною, не меншою за 3, над правим кільцем Безу стабільного рангу 2 має елементарну діагональну редукцію. Доведено, що праве кільце Безу стабільного рангу 1 є правим 2-евклідовим кільцем.

Вступ. Кільця, над якими можлива елементарна діагональна редукція матриць, досліджувались багатьма відомими математиками (К. Гауссом, Г. Смітом, Ван дер Варденом та ін.). У статті [1] доведено, що такими є комутативні 2-евклідові області. Наявність дільників нуля ускладнює дослідження. Зокрема, класичне означення норми у випадку кільця з дільниками нуля справджується не завжди. Спробу розв'язати цю проблему для комутативного кільця було здійснено у роботі [2]. У даній статті ця проблема розв'язується для випадку некомутативного кільця. Для цього, як у статті [2], розглядається означення норми над кільцем і по відношенню до цієї норми вводиться поняття правого 2-евклідового кільця. Доведено, що праве 2-евклідове кільце є правим кільцем Ерміта та правим кільцем Безу, а також показано, що довільна зворотна матриця над правим 2-евклідовим кільцем розкладається у скінченний добуток елементарних матриць. Крім цього, доведено, що елементарну діагональну редукцію над правим кільцем Безу стабільного рангу 2 має довільний унімодулярний рядок довжиною, не меншою за 3. Також показано, що праве кільце Безу стабільного рангу 1 є правим 2-евклідовим кільцем.

Означення та домовленості. Під кільцем R розуміємо асоціативне кільце із відмінною від нуля одиницею.

Нормою [2] над кільцем R назвемо функцію $\varphi : R \to \mathbb{Z}$, яка задовольняє такі властивості:

$\varphi(0) = 0$,

$\varphi(a) > 0$ для будь-якого ненульового елемента $a \in R$;

$\varphi(a \cdot b) \geq \varphi(a)$ для довільних елементів $a, b \in R$ таких, що $a \cdot b \neq 0$.

Під *правим k-членним ланцюгом подільності* $(k \in \mathbb{N})$ для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, розуміємо послідовність рівностей

$$a = bq_1 + r_1, \quad b = r_1 q_2 + r_2, \ldots, r_{k-2} = r_{k-1} q_k + r_k. \qquad (1)$$

Правий k-членний ланцюг подільності (1) називається *скінченним*, якщо $r_k = 0$.

Назвемо кільце R *правим n-евклідовим* кільцем по відношенню до норми φ, якщо для довільних елементів $a \in R$, $b \in R \backslash 0$ існує правий k-членний ланцюг подільності (1) для деякого $k < n$ такий, що виконується співвідношення $\varphi(r_k) < \varphi(b)$.

Під *елементарними матрицями* розуміємо матриці двох видів: діагональні матриці зі зворотними елементами на головній діагоналі і матриці, відмінні від одиничної наявністю деякого ненульового елемента поза головною діагоналлю.

Групу всіх зворотних матриць n-го порядку позначимо через $GL_n(R)$, а її підгрупу, породжену елементарними матрицями, — через $GE_n(R)$. Легко показати, що група $GE_n(R)$ породжується матрицями вигляду [3]

$$F(a) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ \cdot & \\ 1 & a \end{pmatrix}.$$

Кільце R називається GE_n*-кільцем*, якщо $GL_n(R) = GE_n(R)$ [4].

Якщо для довільних двох елементів a, b кільця R існує зворотна матриця $M \in GL_2(R)$ така, що $(a, b)M = (d, 0)$, то кільце R називається *правим кільцем Ерміта* [5]. Кільце, у якому довільний скінченнопороджений правий ідеал є правим головним, називається *правим кільцем Безу* [6].

2-Евклідові кільця. Переформулюємо означення правого n-евклідового кільця для випадку $n = 2$: кільце R назвемо *правим 2-евклідовим кільцем* по відношенню до норми φ, якщо для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, виконується одна із двох умов:

існують $q, r \in R$ такі, що $a = bq + r$ і $\varphi(r) < \varphi(b)$;

існують $q_1, q_2, r_1, r_2 \in R$ такі, що $a = bq_1 + r_1$, $b = r_1 q_2 + r_2$ і $\varphi(r_2) < \varphi(b)$.

Твердження 1. *Якщо для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий 2-членний ланцюг подільності вигляду* (1), *то кільце R є правим 2-евклідовим кільцем.*

Доведення даного твердження очевидним чином випливає з означення правого 2-евклідового кільця.

Твердження 2. *Якщо R — праве 2-евклідове кільце, то для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий ланцюг подільності.*

Доведення даного твердження повторює доведення твердження 2 із [2] (з тією поправкою, що необхідно розглядати правий ланцюг подільності), а тому ми його не наводимо.

Теорема 1. *Праве 2-евклідове кільце є правим кільцем Ерміта.*

Доведення. Нехай R — праве 2-евклідове кільце. За твердженням 2 для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий ланцюг подільності $a = bq_1 + r_1$, $r_{i-1} = r_i q_{i+1} + r_{i+1}$, де $1 \leq i \leq k-1$, $b = r_0$, $r_k = 0$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$(a, b)F(q_1)F(-q_2)\ldots F\left((-1)^{i-1}q_i\right)\ldots F\left((-1)^{k-1}q_k\right) = \left(r_{k-1}(-1)^{k(k-1)/2}, 0\right).$$

Зрозуміло, що

$$\prod_{i=1}^{k} F\left(q_i(-1)^{i-1}\right) \in GL_2(R).$$

Отже, R — праве кільце Ерміта.

Теорему доведено.

Теорема 2. *Праве 2-евклідове кільце є правим кільцем Безу.*

Доведення. Нехай R — праве 2-евклідове кільце. На підставі твердження 2 для довільних елементів $a, b \in R$, $b \neq 0$, існує скінченний правий ланцюг подільності

$$a = bq_1 + r_1,\ b = r_1 q_2 + r_2, \ldots, r_{k-3} = r_{k-2}q_{k-1} + r_{k-1},\ r_{k-2} = r_{k-1}q_k. \quad (2)$$

З останньої рівності ланцюга (2) бачимо, що $r_{k-2}R \subset r_{k-1}R$, з передостанньої — $r_{k-3}R \subset r_{k-1}R$ і т. д. У підсумку отримуємо

$$bR \subset r_{k-1}R, \qquad aR \subset r_{k-1}R. \quad (3)$$

З іншого боку, підставивши в другу рівність ланцюга (2) вираз $r_1 = a - bq_1$, отримаємо $b = (a - bq_1)q_2 + r_2$. Звідси $r_2 = b(1 + q_1q_2) - aq_2$. Аналогічно можна виразити r_3, r_4 і т. д. У кінцевому випадку

$$r_{k-1} = ax + by, \quad x, y \in R. \tag{4}$$

Із (3) і (4) випливає

$$aR + bR = r_{k-1}R,$$

а це означає, що довільний правий скінченновимірний ідеал є правим головним ідеалом.

Теорему доведено.

Теорема 3. *Праве 2-евклідове кільце є GE_n-кільцем, $n \in \mathbb{N}$.*

Доведення. Нехай R — праве 2-евклідове кільце. Для доведення теореми достатньо показати, що довільна зворотна над R матриця зводиться за допомогою елементарних перетворень до одиничної матриці.

При $n = 1$ все очевидно. Нехай $n = 2$. Розглянемо зворотну матрицю

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(R).$$

За твердженням 2 для елементів a, b (з точністю до позначень можна вважати, що $b \neq 0$) існує скінченний правий ланцюг подільності $a = bq_1 + r_1$, $r_{i-1} = r_iq_{i+1} + r_{i+1}$, де $1 \le i \le k-1$, $b = r_0$, $r_k = 0$, $r_{k-1} = 1$, $k \in \mathbb{N}$. Тоді

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} F(q_1)F(-q_2)\ldots F\big((-1)^{i-1}q_i\big)\ldots F\big((-1)^{k-1}q_k\big) = \begin{pmatrix} (-1)^{k(k-1)/2} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що матриця

$$\begin{pmatrix} (-1)^{k(k-1)/2} & 0 \\ * & * \end{pmatrix}$$

елементарними перетвореннями легко зводиться до одиничної.

Індукція за розмірами матриць завершує доведення теореми.

Кільця стабільного рангу ≤ 2. Рядок $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ елементів кільця R називається *правим унімодулярним рядком,* якщо існують такі елементи $x_i \in R$, $1 \le i \le n$, що $\sum a_ix_i = 1$. Кільце R називається *кільцем стабільного рангу* m [7], якщо для довільного правого унімодулярного рядка $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, де $n > m$, існують такі елементи $b_i \in R$, $1 \le i \le n-1$, що рядок $(a_1 + a_nb_1, \ldots, a_{n-1} + a_nb_{n-1})$ є правим унімодулярним рядком.

Теорема 4. *Нехай R — праве кільце Безу стабільного рангу 2. Тоді для довільних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $n \ge 3$, таких, що $a_1R + a_2R + \ldots + a_nR = R$, існує матриця $M \in GE_n(R)$ така, що*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)M = (1, 0, \ldots, 0).$$

Доведення. Достатньо розглянути випадок $n = 3$ (доведення у випадках $n > 3$ проводиться за індукцією). Нехай $a, b, c \in R$ і $aR + bR + cR = R$. Тоді $au + bv + cf = 1$, $u, v, f \in R$.

Оскільки R — кільце стабільного рангу 2, то існують такі $x, y \in R$, що

$$(a + cx)R + (b + cy)R = R.$$

Звідси

$$(a + cx)p + (b + cy)q = 1, \quad p, q \in R,$$

або

$$ap + bq + c(xp + yq) = 1.$$

Тоді

$$(a, b, c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 1 \end{pmatrix} = (a + cx, b + cy, c),$$

$$(a + cx, b + cy, c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & p(1-c) \\ 0 & 1 & q(1-c) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a + cx, b + cy, 1),$$

$$(a + cx, b + cy, 1)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -(a+cx) & -(b+cy) & 1 \end{pmatrix} = (0, 0, 1).$$

Рядок $(0, 0, 1)$ множенням на елементарні матриці легко зводиться до вигляду $(1, 0, 0)$, що й необхідно було показати.

Теорему доведено.

Теорема 5. *Нехай R — праве кільце Безу стабільного рангу 2. Тоді для довільних елементів $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $n \geq 3$, існує матриця $M \in GE_n(R)$ така, що*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)M = (\alpha, \beta, 0, \ldots, 0), \quad \alpha, \beta \in R.$$

Доведення. Нехай $a, b, c \in R$ і $aR + bR + cR = dR$. Тоді $a = da_0$, $b = db_0$, $c = dc_0$, $au + bv + cf = d$, $a_0, b_0, c_0, u, v, f \in R$. Позначимо $e_0 = 1 - a_0 u - b_0 v - c_0 f$. Тоді $de_0 = 0$ і $a_0 R + b_0 R + c_0 R = R$.

Оскільки R — кільце стабільного рангу 2, то існують такі $x_1, x_2, y_1, y_2 \in R$, що

$$(a_0 + c_0 x_1 + e_0 x_2)R + (b_0 + c_0 y_1 + e_0 y_2)R = R,$$

або

$$(a_0 + c_0 x_1 + e_0 x_2)p + (b_0 + c_0 y_1 + e_0 y_2)q = 1, \quad p, q \in R.$$

Домножимо останню рівність зліва на d:

$$d(a_0 + c_0 x_1 + e_0 x_2)p + d(b_0 + c_0 y_1 + e_0 y_2)q =$$
$$= (a + cx_1)p + (b + cy_1)q = ap + bq + c(x_1 p + y_1 q) = d.$$

Тоді

$$(a, b, c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = (a + cx_1, b + cy_1, c),$$

$$(a + cx_1, b + cy_1, c)\begin{pmatrix} 1 & 0 & p(1-c_0) \\ 0 & 1 & q(1-c_0) \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a + cx_1, b + cy_1, d),$$

$$(a+cx_1, b+cy_1, d)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p \\ 0 & 1 & -q \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (a+cx_1, b+cy_1, 0).$$

Індукція за розмірами початкового рядка завершує доведення.

Теорему доведено.

Теореми 4 та 5 легко переформульовуються та очевидним чином доводяться для випадку кільця стабільного рангу 1.

***Наслідок* 1.** *Нехай* R — *праве кільце Безу стабільного рангу* 1. *Тоді для довільних елементів* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $n \geq 2$, *таких, що* $a_1 R + a_2 R + \ldots + a_n R = R$, *існує матриця* $M \in GE_n(R)$ *така, що*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)M = (1, 0, \ldots, 0).$$

***Наслідок* 2.** *Нехай* R — *праве кільце Безу стабільного рангу* 1. *Тоді для довільних елементів* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$, $n \geq 2$, *існує матриця* $M \in GE_n(R)$ *така, що*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)M = (\alpha, 0, \ldots, 0), \qquad \alpha \in R.$$

Теорема 6. *Праве кільце Безу стабільного рангу* 1 *є правим* 2-*евклідовим кільцем.*

Доведення. Нехай R — праве кільце Безу стабільного рангу 1. Розглянемо елементи $a, b \in R$ такі, що $aR + bR = dR$. За наслідком 2 кільце R є правим кільцем Ерміта. Тоді існують елементи $a_0, b_0 \in R$ такі, що $a = da_0$, $b = db_0$ і $a_0 R + b_0 R = R$. А оскільки R є кільцем стабільного рангу 1, то для елементів a_0, b_0 існує такий елемент $t \in R$, що $a_0 - b_0 t = u$, де u — зворотний елемент. Тоді маємо

$$a_0 = b_0 t + u, \qquad b_0 = uu^{-1} b_0 + 0.$$

Домноживши ці рівності зліва на d, отримаємо

$$a = bt + c, \qquad b = cu^{-1} b_0 + 0,$$

де $c = du$ ($du \neq 0$ внаслідок зворотності u).

Отже, для довільних елементів a, b, $b \neq 0$, кільця R існує скінченний правий 2-членний ланцюг подільності. Тому за твердженням 1 кільце R є правим 2-евклідовим кільцем.

Теорему доведено.

1. *Забавський Б. В.* Кільця, над якими довільна матриця допускає діагональну редукцію елементарними перетвореннями // Мат. студ. – 1997. – **8**, № 2. – С. 136–139.
2. *Забавський Б. В., Романів О. М.* Комутативні 2-евклідові кільця // Там же. – 2001. – **15**, № 2. – С. 140–144.
3. *Bougaut B.* Anneaux quasi-Euclidiens // These de docteur troisieme cycle. – 1976. – 67 p.
4. *Cohn P. M.* On the structure of the GL_2 of ring // I. H. E. S. Publ. Math. – 1966. – **30**. – P. 365–413.
5. *Kaplansky I.* Elementary divisors and modules // Trans. Amer. Math. Soc. – 1949. – **66**. – P. 464–491.
6. *Кон П.* Свободные кольца и их связи. – Пер. с англ. – М.: Мир, 1975. – 420 с.
7. *Warfield R. B.* Stable equivalence of matrices and resolutions // Communs Algebra. – 1978. – **6**. – P. 1811–1828.

Одержано 07.07.2003