УДК 517.5

А. Г. Бакан (Ин-т математики НАН Украины, Киев)

ДОПОЛНЕНИЕ К ТЕОРЕМЕ С. Н. МЕРГЕЛЯНА О ПЛОТНОСТИ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ В ПРОСТРАНСТВЕ C_w^0

We consider the theorem on polynomial denseness in the space C_w^0 proved by S.N. Mergelyan in 1956. For the case where algebraic polynomials are dense in the space C_w^0, we obtain an addition to the theorem considered and present the complete description of all functions which can be approximated by algebraic polynomials in the seminorm.

До встановленої С. Н. Мергеляном у 1956 р. теореми про поліноміальну щільність у просторі C_w^0 одержано доповнення у випадку, коли алгебраїчні поліноми є щільними у просторі C_w^0. У цьому випадку наведено повний опис усіх функцій, які можуть бути наближені алгебраїчними многочленами у напівнормі.

1. Предварительные сведения и основной результат. ***1.1. Используемые обозначения и понятия.*** Пусть X — линейное пространство над полем вещественных чисел $\mathbb{R}$, на котором задана функция $\|\cdot\|_X : X \to \mathbb{R}$ (см. [1, с. 161]). Пара $(X, \|\cdot\|_X)$ называется полунормированным или нормированным пространством, если функция $\|\cdot\|_X$ является соответственно полунормой или нормой (см. [1, с. 173]). В некоторых случаях это пространство также будем обозначать через X, т. е. $X = (X, \|\cdot\|_X)$.

Для двух полунормированных пространств X и Y будем писать $X \equiv Y$, если X и Y тождественно совпадают. Для полунормированного пространства $X = (X, \|\cdot\|_X)$ фактор-пространство $X \backslash N_X = \left(X \setminus N_X, \|\cdot\|_{X \setminus N_X}\right)$, элементами которого являются множества $\pi(x) := x + N_X$, $x \in X$, где $\|\pi(x)\|_{X \setminus N_X} := \|\cdot\|_X$ и $N_X := \{ x \in X \,|\, \|x\|_X = 0 \}$, является нормированным (см. [2], гл. 1, § 10, п. 2) и называется нормированным пространством, *ассоциированным* с полунормированным пространством X (см. [2], гл. 1, § 8, п. 5). Для двух *линейно изометричных* (см. [3], гл. 4, § 1, п. 1.3) нормированных пространств X и Y, т. е. для которых существует такое линейное преобразование $U : X \to Y$, что: а) $U(X) = Y$; б) $\|U(x)\|_Y = \|x\|_X$ $\forall\, x \in X$, будем использовать обозначение $X \cong Y$. Напомним, что функция $M_F(x) := \lim_{\delta \downarrow 0} \sup_{y \in (x-\delta, x+\delta)} F(y)$ называется *верхней функцией Бэра* для функции $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и функция F называется *полунепрерывной сверху* (пн. св.), если $F(x) = M_F(x)$ $\forall\, x \in \mathbb{R}$. Обозначим через $\mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ множество неотрицательных и равномерно ограниченных на $\mathbb{R}$ функций, через $\mathcal{W}_+(\mathbb{R})$ множество пн. св. функций из $\mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ и через $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ множество тех $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$, которые удовлетворяют условию $\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^n w(x) < \infty$ для всех $n = 0, 1, \ldots$. Пусть

$$S_F := \{ x \in X \,|\, F(x) \neq 0 \}$$

и для $B \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$ и $h : A \to \mathbb{R}$ символ $h\restriction_B$ обозначает функцию $h\restriction_B : B \to \mathbb{R}$, удовлетворяющую условию $h\restriction_B(x) = h(x)$ $\forall\, x \in B$.

Замыкание произвольного $A \subset \mathbb{R}$ будем обозначать через $\overline{A}$, а $\chi_A(x)$ будет обозначать индикаторную функцию множества A, равную 1, если $x \in A$, и 0 — в противном случае. Пусть $C(A)$ является линейным пространством всех действительнозначных и непрерывных на A функций, $\|f\|_{C(A)} := \sup_{x\in A}|f(x)|$ для $f \in C(A)$ и $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ — множество всех алгебраических многочленов с действительными коэффициентами. Для произвольной функции $w \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ рассмотрим линейное пространство

$$\mathcal{C}_w^0(A) \ := \ \left\{ f \in C(A) \,\middle|\, \lim_{x\in A,\, |x|\to\infty} w(x)\cdot f(x) = 0 \right\}.$$

Если множество A ограничено, то очевидно, $\mathcal{C}_w^0(A) \equiv C(A)$. Для произвольного замкнутого множества F такого, что $S_w \subset F \subset \mathbb{R}$, введем полунормированное пространство

$$C_w^0(F) \ := \ \left(\mathcal{C}_w^0(F), \|\cdot\|_w\right) \ \equiv \ \left(\left\{ f \in C(F) \,\middle|\, \lim_{x\in F,\, |x|\to\infty} w(x)\cdot f(x) = 0 \right\}, \|\cdot\|_w\right),$$

где $\|f\|_w := \sup_{x\in S_w}|w(x)f(x)|$. Если $F = \mathbb{R}$, то будем обозначать

$$C_w^0 \ := \ C_w^0(\mathbb{R}).$$

1.2. Основные результаты. В 1958 г. С. Н. Мергелян [4, с. 121] заметил, что весовые свойства произвольной функции $w \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ не изменятся, если ее заменить верхней функцией Бэра $M_w(x)$. Действительно, из определения функции Бэра непосредственно следует

$$0 \ \le \ w(x) \ \le \ M_w(x) \ \le \ \|w\|_{C(\mathbb{R})} \quad \forall\, x \in \mathbb{R}, \quad S_w \subseteq S_{M_w} \subseteq \overline{S}_w \ = \ \overline{S}_{M_w}. \tag{1}$$

Кроме того, для любого открытого множества $G \subset \mathbb{R}$ имеют место равенства

$$\|f\cdot\chi_G\|_w \ = \ \|f\cdot\chi_G\|_{M_w} \quad \forall\, f \in C(\overline{S}_w). \tag{2}$$

Поэтому для произвольного замкнутого множества F, удовлетворяющего условию $S_w \subset F \subset \mathbb{R}$, линейные пространства $\mathcal{C}_w^0(F)$ и $\mathcal{C}_{M_w}^0(F)$ совпадают и $\|f\|_w = \|f\|_{M_w}$ для произвольной функции $f \in \mathcal{C}_w^0(F)$. Поэтому $C_w^0(F) \equiv$ $\equiv C_{M_w}^0(F)$. Следовательно, при рассмотрении пространств $C_w^0(F)$ можно рассматривать, без ограничения общности, только пн. св. функции w.

Особый интерес к полунормированным пространствам

$$C_w^0 \ = \ \left(\left\{ f \in C(\mathbb{R}) \,\middle|\, \lim_{|x|\to\infty} w(x)\cdot f(x) = 0 \right\}, \|\cdot\|_w\right)$$

возникает в случае, когда функция w, называемая *весовой,* принадлежит классу $\mathcal{W}^*(\mathbb{R})$, что обеспечивает принадлежность к C_w^0 всех степенных функций x^n, $n \ge 0$. В 1924 г. С. Н. Бернштейн [5] сформулировал проблему о нахождении условий на вес w, при которых алгебраические многочлены плотны в пространстве C_w^0. С тех пор эта проблема и ее различные обобщения исследовались во многих работах, где была выявлена ее важность и установлена ее тесная связь с рядом глубоких вопросов общей теории функций (см. [4, 6 – 9]). В настоящее время известно несколько решений этой проблемы: Н. И. Ахиезера и С. Н. Бернштейна [10], С. Н. Мергеляна [4] и Луи де Бранжа [11]. При этом следует отметить, что упомянутый результат Луи де Бранжа [11] в 1996 г. был улучшен М. Содиным и П. Юдитским [12].

Настоящая статья посвящена изучению банахова пространства B_w^0, являющегося пополнением нормированного пространства N_w^0, ассоциированного с полунормированным пространством C_w^0, при произвольном весе $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$. Применение полученного результата при $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ дает дополнение к теореме С. Н. Мергеляна [4] (теорема 7), посвященной решению упомянутой проблемы С. Н. Бернштейна.

Для произвольной функции $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$ через N_w^0 обозначим нормированное пространство, ассоциированное с полунормированным пространством $C_w^0(\mathbb{R})$. В соответствии с введенными ранее обозначениями помимо нормированного пространства $C_w^0(\overline{S}_w)$ рассмотрим также нормированное пространство

$$C_w^0(\overline{S}_w)\restriction_{S_w} \;:=\; \left(\left\{ f\restriction_{S_w} \,\middle|\, f \in C_w^0(\overline{S}_w)\right\}, \|\cdot\|_w\right).$$

Тогда пространство N_w^0 может быть описано следующими соотношениями:

$$N_w^0 \;\cong\; C_w^0(\overline{S}_w) \;\cong\; C_w^0(\overline{S}_w)\restriction_{S_w} \qquad \forall\, w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R}). \tag{3}$$

Для описания банахова пространства B_w^0, являющегося пополнением пространства N_w^0, нам потребуется следующее определение, которое одновременно содержит в себе утверждение о том, что определяемое там пространство B_w^0 является банаховым.

Определение 1. *Пусть* $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$. *Банаховым пространством* B_w^0, *ассоциированным с полунормированным пространством* $C_w^0(\mathbb{R})$, *будем называть снабженное нормой*

$$\|f\|_w \;:=\; \sup_{x \in S_w} w(x)|f(x)|$$

линейное пространство функций $f\colon S_w \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющих следующим условиям*:

1) *функция* f *является непрерывной на множестве*

$$E_{1/\delta}(w) \;:=\; w^{(-1)}([\delta, +\infty)) \;=\; \{x \in \mathbb{R} \,|\, w(x) \ge \delta\} \tag{4}$$

для произвольного $\delta > 0$;

2) $\lim\limits_{w(x)\to 0} w(x)f(x) \;=\; 0$, *т. е.*

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \delta > 0 : \{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < w(x) < \delta\} \subseteq \{x \in S_w \,|\, w(x)|f(x)| < \varepsilon\}; \tag{5}$$

3) $w(x)f(x) \to 0$, *когда* $x \in S_{\mathrm{w}}$ *и* $|x| \to \infty$.

Заметим, что в случае, когда $\lim_{|x|\to\infty} w(x) = 0$, третье свойство определения 1 следует из второго и поэтому может быть опущено в этом определении.

В следующей теореме устанавливается, что введенное в определении 1 банахово пространство B_w^0 действительно является пополнением пространства N_w^0.

Теорема 1. *Пусть* $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$. *Линейный оператор*

$$T\colon C_w^0(\mathbb{R}) \to B_w^0,$$

определенный формулой

$$Tf \;:=\; f\restriction_{S_w} \qquad \forall\, f \in C_w^0(\mathbb{R}),$$

является изометрическим оператором плотного вложения полунормированного пространства $C_w^0(\mathbb{R})$ *в банахово пространство* B_w^0, *т. е.*:

1) $\|Tf\|_w = \|f\|_w \quad \forall f \in C_w^0(\mathbb{R})$;

2) $T\big(C_w^0(\mathbb{R})\big)$ *является плотным подмножеством банахова пространства* B_w^0. *Кроме того, множество* $T\big(C_w^0(\mathbb{R})\big)$ *состоит из всех тех функций* $f \in B_w^0$, *которые могут быть продолжены до непрерывной на* $\overline{S}_w$ *функции.*

Теорема 1 дает возможность доказать такие утверждения.

***Следствие* 1.** *Пусть* $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$.

1. $C_w^0(\mathbb{R})$ *является нормированным пространством тогда и только тогда, когда*

$$\overline{S}_w = \mathbb{R}.$$

2. *Следующие утверждения эквивалентны*:

2a) $C_w^0(\mathbb{R})$ *является банаховым пространством*; 2b) $B_w^0 = C_w^0(\mathbb{R})$;

2c) $S_w = \mathbb{R}$ *и* $B_w^0 \subseteq C(\mathbb{R})$; 2d) $\inf\limits_{x \in [-R, R]} w(x) > 0 \quad \forall R > 0$.

3. *Следующие утверждения эквивалентны*:

3a) N_w^0 *является банаховым пространством*; 3b) $C_w^0(\mathbb{R})\restriction_{S_w} = B_w^0$;

3c) $S_w = \overline{S}_w$ *и* $B_w^0 \subseteq C(S_w)$; 3d) $\inf\limits_{x \in S_w \cap [-R, R]} w(x) > 0 \quad \forall R > 0$,

где $\inf \varnothing := +\infty$.

***Следствие* 2.** *Пусть* $w \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ *и* $\mathcal{M}$ *является плотным подмножеством полунормированного пространства* $C_w^0(\mathbb{R})$. *Функция* $g : S_w \to \mathbb{R}$ *может быть приближена элементами множества* $\mathcal{M}$ *по норме* $\|\cdot\|_w$, *т. е.*

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_\varepsilon \in \mathcal{M}: \; w(x)\,|g(x) - m_\varepsilon(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in S_w \tag{6}$$

тогда и только тогда, когда существует $G \in B_{M_w}^0$ *такое, что* $G\restriction_{S_w} = g$.

В теореме 7 из [4] С. Н. Мергелян доказал, что для любой функции $w \in \mathcal{W}^*(\mathbb{R})$ либо алгебраические многочлены $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ плотны в полунормированном пространстве $C_w^0(\mathbb{R})$, либо ими можно приблизить по норме $\|\cdot\|_w$ только те функции $f: S_w \to \mathbb{R}$, которые с области своего опеределения S_w могут быть продолжены на всю комплексную плоскость как целые функции минимального экспоненциального типа. Этот класс целых функций был полностью описан И. Хачатряном [13]. Следующая теорема является главным результатом статьи и дает полное описание всех функций, которые могут быть аппроксимированы алгебраическими многочленами по норме $\|\cdot\|_w$ в случае, когда эти многочлены плотны в полунормированном пространстве $C_w^0(\mathbb{R})$. Таким образом, эта теорема дополняет указанную теорему С. Н. Мергеляна [4] (теорема 7).

Теорема 2. *Пусть* $w \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ *удовлетворяет условию*

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} |x|^n w(x) < \infty, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{7}$$

M_w *является верхней функцией Бэра для* w *и алгебраические многочлены* $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ *плотны в полунормированном пространстве* $C_w^0(\mathbb{R})$.

Тогда функция $f: S_w \to \mathbb{R}$ *может быть аппроксимирована алгебраическими многочленами по норме* $\|\cdot\|_w$, *т. е.*

$$\exists \{P_n\}_{n\ge 1} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}): \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in S_w} w(x)|P_n(x) - f(x)| = 0$$

тогда и только тогда, когда эта функция может быть продолжена на множество S_{M_w} *как функция* $f: S_{M_w} \to \mathbb{R}$, *удовлетворяющая следующим условиям*:

1) *для любого* $m \ge 1$ *функция* f *является непрерывной на замкнутом множестве* $\left\{x \in \mathbb{R} \,\middle|\, M_w(x) \ge \frac{1}{m}\right\}$;

2) $\lim\limits_{M_w(x)\to 0} M_w(x)\cdot f(x) = 0$, *т. е. для любого* $\varepsilon > 0$ *существует* $\delta > 0$ *такое, что*

$$\{x \in \mathbb{R} \,|\, 0 < M_w(x) < \delta\} \subseteq \left\{x \in S_{M_w} \,|\, M_w(x)\cdot|f(x)| < \varepsilon\right\}.$$

Если множество S_w ограничено, то условие (7) выполняется и согласно теореме Вейерштрасса алгебраические многочлены $\mathcal{P}(\mathbb{R})$ плотны в $C_w^0(\mathbb{R})$. Поэтому для произвольного веса $w \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ с ограниченным S_w условия 1 и 2 теоремы 2 дают весовой аналог теоремы Вейерштрасса об аппроксимации алгебраическими многочленами. Следует отметить при этом, что для веса $w(x) = \sqrt{1-x^2}\cdot\chi_{[-1,1]}(x)$ условия 1 и 2 теоремы 2 эквивалентны условиям $f \in C((-1, 1))$ и $\lim_{|x|\to 1}\sqrt{1-x^2}\cdot f(x) = 0$. Этот факт известен и был получен в работе [14], где в соответствии с этими двумя условиями введены подпространства известных пространств B^r.

2. Доказательство теоремы 1. Сначала докажем справедливость соотношений (3) и тот факт, что пространство B_w^0 из определения 1 является банаховым. Всюду ниже будем использовать следующие обозначения:

$$\begin{gathered} I := [-1, 1], \quad J := (-\infty, -1) \cup (1, +\infty), \\ I_R := R\cdot I, \quad J_R := R\cdot J, \quad R > 0. \end{gathered} \tag{8}$$

***2.1. Доказательство соотношений* (3).** Зафиксируем произвольную функцию $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$. Очевидно, что

$$\begin{gathered} \left\| f\restriction_{S_w} \right\|_w = \|f\|_w \quad \forall f \in C(\overline{S}_w), \\ \left\| f\restriction_{S_w} \right\|_w = \left\| f\restriction_{\overline{S}_w} \right\|_w = \|f\|_w \quad \forall f \in C_w^0(\mathbb{R}). \end{gathered} \tag{9}$$

Поэтому из определений пространств $C_w^0(\overline{S}_w)$ и $C_w^0(\overline{S}_w)\restriction_{S_w}$ непосредственно следует, что линейное отображение $U: C_w^0(\overline{S}_w) \to C_w^0(\overline{S}_w)\restriction_{S_w}$, определенное формулой $U(f) := f\restriction_{S_w}$, удовлетворяет обоим условиям линейной изометричности а) и б) п. 1.1, и, значит, $C_w^0(\overline{S}_w) \cong C_w^0(\overline{S}_w)\restriction_{S_w}$.

Для того чтобы доказать изометричность пространств N_w^0 и $C_w^0(\overline{S}_w)$, заметим, что в соответствии с определениями п. 1.1 элементами пространства N_w^0 являются множества $\pi(f) = f + N_{C_w^0}$, где $f \in C_w^0$ и

$$N_{C_w^0} = \{\varphi \in C(\mathbb{R}) \,|\, \varphi(x) = 0 \;\; \forall x \in S_w\} \equiv \{\varphi \in C(\mathbb{R}) \,|\, \varphi(x) = 0 \;\; \forall x \in \overline{S}_w\}.$$

Поэтому $(f+\varphi)\restriction_{\overline{S}_w} = f\restriction_{\overline{S}_w}$ для всех $f \in C_w^0$, $\varphi \in N_{C_w^0}$ и, значит, формула

$$V(\pi(f)) = f\restriction_{\bar{S}_w} \quad \forall f \in C_w^0$$

определяет линейное отображение V пространства N_w^0 в пространство $C_w^0(\bar{S}_w)$, которое на основании (9) удовлетворяет условию линейной изометричности б) п. 1.1:

$$\| V(\pi(f)) \|_w = \|f\|_w \equiv \| \pi(f) \|_{N_w^0} \quad \forall f \in C_w^0.$$

Осталось показать справедливость равенства $V\left(N_w^0\right) = C_w^0(\bar{S}_w)$, т. е. что для произвольной функции $F \in C_w^0(\bar{S}_w)$ существует такая функция $f \in C_w^0$, что $f\restriction_{\bar{S}_w} = F$. Этот факт непосредственно следует из общей теоремы Титце – Урысона (см. [15], гл. 2, § 1, п. 8), согласно которой непрерывную на замкнутом множестве $\bar{S}_w$ функцию F можно непрерывно продолжить на всю прямую до функции $f \in C(\mathbb{R})$, которая в силу равенств $w(x)f(x) = 0 \ \ \forall x \in \mathbb{R} \setminus S_w$ будет принадлежать также пространству C_w^0.

Итак, помимо изометричности пространств N_w^0, $C_w^0(\bar{S}_w)$ и $C_w^0(\bar{S}_w)\restriction_{S_w}$ мы доказали следующие равенства линейных пространств:

$$C_w^0\restriction_{\bar{S}_w} = C_w^0(\bar{S}_w), \qquad C_w^0\restriction_{S_w} = C_w^0(\bar{S}_w)\restriction_{S_w}. \tag{10}$$

2.2. Доказательство банаховости пространства B_w^0. Для произвольной функции $f \in B_w^0$ и $\varepsilon = 1$ можно найти такое $R > 0$ в условии 3 определения 1 и $\delta > 0$ в (5), что

$$\| w \cdot f \|_{C(J_R)} \leq 1, \qquad \| w \cdot f \|_{C\left(w^{(-1)}((0,\delta))\right)} \leq 1.$$

Поскольку функция w является пн. св., для любого $\delta \in (0, 1]$ множество $E_{1/\delta}(w)$ замкнуто (см. [16]), и поэтому множество

$$S_w \setminus \left[J_R \cup w^{(-1)}((0,\delta)) \right] = I_R \cap E_{1/\delta}(w)$$

является компактом, на котором функция f равномерно ограничена ввиду условия 1 определения 1. Таким образом,

$$\|f\|_w < \infty \qquad \forall f \in B_w^0,$$

откуда несложно получить, что пространство B_w^0 является линейным нормированным.

Рассмотрим теперь произвольную фундаментальную последовательность $\{ f_n \}_{n \geq 1} \subset B_w^0$, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \geq 1 : w(x) | f_n(x) - f_m(x) | < \varepsilon \quad \forall x \in S_w, \quad n, m \geq n_\varepsilon. \tag{11}$$

Поскольку при каждом $x \in S_w$ последовательность $\{ f_n(x) \}_{n \geq 1}$ фундаментальна, она имеет предел, который обозначим $f(x)$. Переходя при произвольном, но фиксированном $x \in S_w$ к пределу в (11) при $m \to \infty$, получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_\varepsilon \geq 1 : w(x) | f_n(x) - f(x) | < \varepsilon \quad \forall x \in S_w, \quad n \geq n_\varepsilon. \tag{12}$$

Докажем, что $f \in B_w^0$. Для произвольного $\delta > 0$: $w(x) \geq \delta \ \ \forall x \in E_{1/\delta}(w)$, и поэтому из (12) будем иметь равномерную сходимость на множестве $E_{1/\delta}(w)$ последовательности непрерывных на этом множестве функций $f_n\restriction_{E_{1/\delta}(w)} \in$ $\in C\left(E_{1/\delta}(w)\right)$, $n \geq 1$, к функции $f\restriction_{E_{1/\delta}(w)}$. Согласно известной теореме (см.

[15], гл. 1, § 4, п. 7) это означает непрерывность функции f на множестве $E_{1/\delta}(w)$, т. е. f удовлетворяет первому условию определения 1. Справедливость условий 2 и 3 определения 1 легко выводится из (12). Таким образом, B_w^0 является банаховым пространством.

2.3. Доказательство. Равенство 1 теоремы 1 непосредственно следует из определений оператора T и полунормы $\|\cdot\|_w$.

Докажем, что $T\left(C_w^0\right) \subseteq B_w^0$, где

$$T\left(C_w^0\right) = \left\{ f\restriction_{S_w} \middle| f \in C_w^0 \right\} =: C_w^0\restriction_{S_w}.$$

Если $f \in C_w^0$ и $g = f\restriction_{S_w}$, то условия 1 и 3 определения 1 для функции g, очевидно, выполняются. Докажем, что g удовлетворяет условию 2 определения 1. По произвольному $\varepsilon > 0$ в силу свойства 3 определения 1 можно найти такое $R(\varepsilon) > 0$, что $\|wg\|_{C(S_w \cap J_{R(\varepsilon)})} < \varepsilon$. Обозначим

$$C(\varepsilon) := \|g\|_{C\left(S_w \cap J_{R(\varepsilon)}\right)} \le \|f\|_{C\left(\bar{S}_w \cap J_{R(\varepsilon)}\right)} < \infty.$$

Тогда для $\delta_\varepsilon := \varepsilon / C(\varepsilon) > 0$ на основании того, что $\|wg\|_{C\left(w^{(-1)}((0,\delta_\varepsilon)) \cap I_{R(\varepsilon)}\right)} < \delta_\varepsilon C(\varepsilon) = \varepsilon$ и $w^{(-1)}((0,\delta_\varepsilon)) \cap J_{R(\varepsilon)} \subset S_w \cap J_{R(\varepsilon)}$, будем иметь

$$\|wg\|_{C\left(w^{(-1)}((0,\delta_\varepsilon))\right)} < \varepsilon,$$

что и означает справедливость свойства 2 определения 1 для функции g. Таким образом, с учетом равенства (10)

$$T\left(C_w^0\right) \equiv C_w^0\restriction_{S_w} = C_w^0\left(\bar{S}_w\right)\restriction_{S_w} \subseteq B_w^0. \tag{13}$$

Если $f \in C\left(\bar{S}_w\right)$ и $f\restriction_{S_w} \in B_w^0$, то из свойства 3 определения 1 и равенства нулю функции w на множестве $\bar{S}_w \setminus S_w$ следует, что $f \in C_w^0\left(\bar{S}_w\right)$, т. е. в силу (13) $f\restriction_{S_w} \in T\left(C_w^0\right)$. Таким образом, множество $T\left(C_w^0\right)$ действительно состоит из тех функций $f \in B_w^0$, которые можно продолжить до непрерывной на $\bar{S}_w$ функции. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что $C_w^0\restriction_{S_w}$ плотно в банаховом пространстве B_w^0.

Рассмотрим произвольные $\varepsilon > 0$, $f \in B_w^0$ и докажем существование такой функции $f_\varepsilon \in C_w^0$, что $\|f - f_\varepsilon\|_w \le 2\varepsilon$. Свойство 2 определения 1 дает возможность найти такое натуральное число m, что

$$\left\{ x \in \mathbb{R} \middle| 0 < w(x) < \frac{1}{m} \right\} \subseteq \{ x \in S_w \mid w(x) | f(x) | < \varepsilon \},$$
$$m > \varepsilon^{-1} \|f\|_w, \qquad E_m \ne \varnothing, \tag{14}$$

где использовано обозначение (см. (4)) $E_p := E_p(w) = \left\{ x \in \mathbb{R} \middle| w(x) \ge \frac{1}{p} \right\}$, $p \ge 1$.

Поскольку f является непрерывной на замкнутом множестве E_{m^2} функцией, мы можем непрерывно продолжить ее на всю прямую методом доказательства леммы 2 из [17] (гл. IV, § 4) до функции $f_\varepsilon \in C(\mathbb{R})$. Именно, рассмотрим открытое множество $\mathbb{R} \setminus E_{m^2}$, которое состоит из конечного или счетного числа непересекающихся интервалов (a_k, b_k). Функцию f_ε полагаем равной f на множестве E_{m^2} и линейной на каждом ограниченном интервале $[a_k, b_k]$. Если же одно из чисел a_k, b_k бесконечно, т. е. интервал вида $(-\infty, b)$ или $(a, +\infty)$ является частью множества $\mathbb{R} \setminus E_{m^2}$, то полагаем

$$f_\varepsilon(b-x) := \begin{cases} x f(b), & x \in (0,1), \\ 0, & x \ge 1, \end{cases} \qquad f_\varepsilon(a+x) := \begin{cases} x f(a), & x \in (0,1), \\ 0, & x \ge 1, \end{cases} \tag{15}$$

соответственно. В лемме 2 из [17] (гл. IV, § 4) доказано, что на каждом конечном интервале I_R, $R > 0$, функция f_ε является непрерывной. Поэтому $f_\varepsilon \in C(\mathbb{R})$. Покажем, что на самом деле $f_\varepsilon \in C_w^0$. Используя свойство 3 определения 1, по произвольному $\rho > 0$ найдем два таких положительных числа r_ρ^+, r_ρ^-, что $|w(x) f(x)| < \rho$ для любого $|x| \ge \min\{r_\rho^+, r_\rho^-\}$ и ни одно из чисел r_ρ^+, $-r_\rho^-$ не принадлежит никакому ограниченному интервалу (a_k, b_k) и (a_k, a_k+1), если $b_k = +\infty$, и (b_k-1, b_k), если $a_k = -\infty$. Пусть $|x| \ge r_p :=$ $:= \max\{r_\rho^+, r_\rho^-\}$. Если $x \in E_{m^2}$, то $|w(x) f_\varepsilon(x)| = |w(x) f(x)| < \rho$. Если же $x \in (a_k, b_k)$, то в силу определения (15) функции f_ε на полубесконечном интервале либо $|w(x) f_\varepsilon(x)| = 0$, либо $(a_k, b_k) \subset (-\infty, -r_\rho^-) \cup (r_\rho^+, +\infty)$, и, полагая $f(\pm\infty) := 0$, имеем

$$|w(x) f_\varepsilon(x)| \le \frac{|f_\varepsilon(x)|}{m^2} \le \max\left\{\frac{|f(a_k)|}{m^2}, \frac{|f(b_k)|}{m^2}\right\} \le$$
$$\le \max\{w(a_k)|f(a_k)|, w(b_k)|f(b_k)|\} < \rho.$$

Таким образом, $\lim_{|x|\to\infty} w(x) f_\varepsilon(x) = 0$, и, значит, принадлежность $f_\varepsilon \in C_w^0$ доказана.

Докажем теперь, что

$$\|f - f_\varepsilon\|_w \le 2\varepsilon. \tag{16}$$

Из определения функции f_ε следует

$$\|f - f_\varepsilon\|_w = \|w(f - f_\varepsilon)\|_{C(S_w \setminus E_{m^2})} \le \|w f\|_{C(S_w \setminus E_{m^2})} + \|w f_\varepsilon\|_{C(S_w \setminus E_{m^2})}.$$

Но для всех $x \in S_w \setminus E_{m^2}$ $0 < w(x) < 1/m^2 < 1/m$, откуда в силу вложения (14) $w(x)|f(x)| < \varepsilon$, и, значит,

$$\|f - f_\varepsilon\|_w \le \varepsilon + \|w f_\varepsilon\|_{C(S_w \setminus E_{m^2})}.$$

Таким образом, для справедливости неравенства (16) достаточно доказать неравенство

$$\|w f_\varepsilon\|_{C(S_w \setminus E_{m^2})} \le \varepsilon. \tag{17}$$

Неравенство (17) очевидно, если $E_{m^2} = \mathbb{R}$. Пусть $\mathbb{R} \setminus E_{m^2} \ne \varnothing$. В силу выбора (14) числа m $E_{m^2} \supset E_m \ne \varnothing$. Рассмотрим произвольный $x \in \mathbb{R} \setminus E_{m^2}$. Тогда $x \in (a, b) \subset \mathbb{R} \setminus E_{m^2}$, где (a, b) — один из тех непересекающихся интервалов, в виде объединения которых представляется открытое множество $\mathbb{R} \setminus E_{m^2}$, причем из $E_{m^2} \ne \varnothing$ следует, что $(a, b) \ne \mathbb{R}$. Положим, как и выше, $f(\pm\infty) := 0$. Линейность функции f_ε на отрезке (a, b) дает возможность записать

$$w(x)|f_\varepsilon(x)| \le \frac{|f_\varepsilon(x)|}{m^2} \le \max\left\{\frac{|f(a)|}{m^2}, \frac{|f(b)|}{m^2}\right\}. \tag{18}$$

Пусть c обозначает одну из точек a, b и c является конечной, т. е. $c \in \{a, b\} \cap \mathbb{R} \subset E_{m^2}$. В случае, когда $c \in E_{m^2} \setminus E_m$, $1/m^2 \leq w(c) < 1/m$, и из вложения (14) получаем $|f(c)|/m^2 \leq w(c)|f(c)| < \varepsilon$. Если же $c \in E_m$, то $1/m^2 \leq \leq w(c)/m$, и в силу неравенства (14) для числа m $|f(c)|/m^2 \leq w(c)|f(c)|/m \leq \leq \|f\|_w/m < \varepsilon$. Итак, с учетом неравенств (18) $w(x)|f_\varepsilon(x)| < \varepsilon$ для любого $x \in \mathbb{R} \setminus E_{m^2}$. Поэтому неравенство (17) верно и основное утверждение (16) доказано. Таким образом, $C_w^0 \restriction_{S_w}$ плотно в банаховом пространстве B_w^0, что и завершает доказательство теоремы 1.

3. Доказательство следствия 1. ***3.1. Вспомогательные утверждения.*** В следующем утверждении устанавливается существование элементов банахова пространства B_w^0 с особыми свойствами в случае, когда множество S_w не является замкнутым.

Лемма 1. *Пусть* $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$ *и для некоторого* $R > 0$

$$\inf_{x \in [-R, R] \cap S_w} w(x) = 0. \tag{19}$$

Тогда существуют такая точка $x_0 \in [-R, R]$ *и функция* $F \in B_w^0$, *что*

$$\|F\|_{C(S_w \cap (x_0 - \delta, x_0 + \delta))} = +\infty \qquad \forall\, \delta > 0. \tag{20}$$

Доказательство. Согласно условию леммы можно найти $x_0 \in [-R, R]$ и такую последовательность $\{x_n\}_{n \geq 0} \subset S_w$, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim_{n\to\infty} w(x_n) = = 0$ и последовательности $1/\lambda_n := w(x_n)$, $|x_n - x_0|$, $n \geq 0$, являются убывающими. Введем обозначение (см. (4)) $E_\lambda := E_\lambda(w) = \{x \in \mathbb{R} \,|\, w(x) \geq 1 \setminus \lambda\}$.

Поскольку $x_{n+1} \in \mathbb{R} \setminus E_{\lambda_n}$, $n \geq 0$, можно найти такую последовательность $\{\delta_n\}_{n \geq 1}$ положительных чисел, что $x_n + \delta_n \cdot (-1, 1) \subset \mathbb{R} \setminus E_{\lambda_{n-1}}$ $\forall\, n \geq 1$ и множества $\{x_n + \delta_n \cdot I\}_{n \geq 1}$ не пересекаются друг с другом. Рассмотрим функцию вида

$$F(x) := \sum_{k \geq 1} \sqrt{\lambda_{k-1}}\, \alpha_k(x), \qquad \alpha_k(x) := \left(1 - \left|\frac{x - x_k}{\delta_k}\right|\right) \chi_I\left(\frac{x - x_k}{\delta_k}\right), \quad k \geq 1. \tag{21}$$

Функция F имеет свойство (20), так как при произвольном натуральном k $F(x_k) = \sqrt{\lambda_{k-1}}$ и $\lim_{k\to\infty} \lambda_k = +\infty$.

Покажем теперь, что $F \in B_w^0$. Поскольку $x_{n+1+p} + \delta_{n+1+p} \cdot (-1, 1) \subseteq \subseteq \mathbb{R} \setminus E_{\lambda_{n+p}} \subseteq \mathbb{R} \setminus E_{\lambda_n}$ $\forall\, n, p \geq 0$, для каждого натурального n

$$F(x)\restriction_{E_{\lambda_n}} = \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\lambda_{k-1}}\, \alpha_k(x)\restriction_{E_{\lambda_n}} \in C\left(E_{\lambda_n}\right). \tag{22}$$

Так как для любого $\delta > 0$ существует такой номер n, что $\lambda_n > 1/\delta$, из $E_{1/\delta}(w) \subset E_{\lambda_n}$ и свойства (22) получим непрерывность F на множестве $E_{1/\delta}(w)$. Поэтому свойство 1 определения 1 для функции F выполняется. Свойство 3 определения 1 для функции F выполняется также ввиду ограниченности множества S_F.

Осталось доказать справедливость свойства 3 определения 1 для функции F. Заметим, что для произвольного натурального k

$$w(x)\alpha_k(x) \leq \frac{1}{\lambda_{k-1}} \alpha_k(x) \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

и поэтому при каждом $n \geq 1$ неравенство $0 < w(x) < 1/\lambda_n$ влечет

$$w(x)\left|F(x)\right| \leq \sum_{k\geq 1} \alpha_k(x) \min\left\{ \frac{1}{\sqrt{\lambda_{k-1}}}, \frac{\sqrt{\lambda_{k-1}}}{\lambda_n} \right\} \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}.$$

Выбирая по произвольному $\varepsilon > 0$ номер n так, чтобы $1/\sqrt{\lambda_n} < \varepsilon$, можно для выполнения вложения (5) положить $\delta = 1/\lambda_n$.

Лемма 1 доказана.

Наряду с полунормированным пространством C_w^0 будем рассматривать нормированные пространства

$$C_w^0\restriction_{S_w} := \left(\left\{ f\restriction_{S_w} \,\middle|\, f \in C_w^0 \right\}, \|\cdot\|_w\right), \qquad C_w^0\restriction_{\overline{S}_w} := \left(\left\{ f\restriction_{\overline{S}_w} \,\middle|\, f \in C_w^0 \right\}, \|\cdot\|_w\right).$$

Лемма 2. *Пусть* $w \in \mathcal{W}_+(\mathbb{R})$. *Тогда для утверждений*:

1) *одно из пространств* C_w^0, $C_w^0\restriction_{\overline{S}_w}$, $C_w^0\restriction_{S_w}$ *является банаховым*;

2) $B_w^0 = C_w^0\restriction_{S_w}$;

3) $\inf\limits_{x\in[-R,R]\cap S_w} w(x) > 0 \quad \forall R > 0$;

4) $S_w = \overline{S}_w$

справедливы следующие импликации:

$$1) \Rightarrow 2) \Rightarrow 3) \Rightarrow 4).$$

Доказательство. 1) $\Rightarrow$ 2). Согласно теореме 1 $C_w^0\restriction_{S_w} \subset B_w^0$. Предположим, что существует функция $F \in B_w^0 \setminus C_w^0\restriction_{S_w}$. Тогда согласно теореме 1 существует такая последовательность $\{f_n\}_{n\geq 1} \subset C_w^0$, что $\lim_{n\to\infty} \|F - f_n\|_w = 0$. Последовательности $\{f_n\}_{n\geq 1}$, $\left\{f_n\restriction_{\overline{S}_w}\right\}_{n\geq 1}$ и $\left\{f_n\restriction_{S_w}\right\}_{n\geq 1}$ будут фундаментальны в пространствах C_w^0, $C_w^0\restriction_{\overline{S}_w}$ и $C_w^0\restriction_{S_w}$ соответственно и не будут иметь в соответствующем пространстве предела. Поэтому каждое из упомянутых пространств не будет полным и, значит, не будет банаховым. Полученное противоречие доказывает равенство $B_w^0 = C_w^0\restriction_{S_w}$.

2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 4). Предположим, что $x_0 \in \overline{S}_w \setminus S_w \neq \varnothing$. Тогда существует такая последовательность $\{x_n\}_{n\geq 0} \subset S_w$, что $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ и $\lim_{n\to\infty} w(x_n) = 0$. Это означает, что (3) неверно, т. е. выполняется (19). Поэтому в силу леммы 1 $B_w^0 \setminus C_w^0\restriction_{S_w} \neq \varnothing$. Полученные противоречия доказывают требуемые импликации и завершают доказательство леммы 2.

***3.2. Доказательство следствия* 1.** Справедливость первого утверждения следствия 1 следует из определения $\|\cdot\|_w$.

3.2.1. Импликация 2b) $\Rightarrow$ 2a) очевидна.

2a) $\Rightarrow$ 2b). Поскольку C_w^0 является, в частности, нормированным пространством, согласно первому утверждению леммы 2 $\overline{S}_w = \mathbb{R}$, откуда с учетом второго и четвертого утверждений леммы 2 следует справедливость условия 2b).

2c) $\Rightarrow$ 2b). Из $S_w = \mathbb{R}$ и теоремы 1 следует $C_w^0 \subset B_w^0$. Условие $B_w^0 \subset C(\mathbb{R})$ и третье условие определения 1 вместе с $S_w = \mathbb{R}$ показывают, что $B_w^0 \subset C_w^0$. Поэтому $B_w^0 = C_w^0$, что и требовалось доказать.

2b) $\Rightarrow$ 2c). Условие 2b) означает, что $S_w = \mathbb{R}$ и $B_w^0 = C_w^0 \subset C(\mathbb{R})$. Поэтому условие 2c) верно.

2b) $\Rightarrow$ 2d). Из 2b) следует 2a) и $S_w = \mathbb{R}$, откуда в силу третьего утверждения леммы 2 получаем справедливость условия 2d).

2d) $\Rightarrow$ 2c). Если при любом $R > 0 : 1/\lambda(R) := \inf_{x \in I_R} w(x) > 0$, то $S_w = \mathbb{R}$ и $I_R \subseteq E_{\lambda(R)}(w)$ $\forall R > 0$. Поэтому в силу первого условия определения 1 для любой $f \in B_w^0 : f \in C(I_R)$ $\forall R > 0$, и, следовательно, $B_w^0 \subset C(\mathbb{R})$, что и требовалось доказать.

3.2.2. В силу (3) и (10) $N_w^0 \cong C_w^0(\bar{S}_w) = C_w^0 \restriction_{S_w}$. Поэтому банаховость пространства N_w^0 эквивалентна банаховости нормированного пространства $C_w^0 \restriction_{S_w}$. Таким образом, импликация 3b) $\Rightarrow$ 3a) очевидна.

3a) $\Rightarrow$ 3b). Если 3a) верно, то пространство $C_w^0 \restriction_{S_w}$ является банаховым и в силу второго утверждения леммы 2 утверждение 3b) верно.

3b) $\Rightarrow$ 3c), 3b) $\Rightarrow$ 3d). Из условия 3b) ввиду утверждений 3, 4 леммы 2 и замкнутости множества S_w с учетом (10) следует $B_w^0 = C_w^0 \restriction_{S_w} = C_w^0(S_w) \subseteq \subseteq C(S_w)$. Поэтому условия 3c) и 3d) верны.

3c) $\Rightarrow$ 3b). Если $f \in B_w^0$, то согласно условию 3c) $f \in C(S_w)$. Тогда в силу замкнутости множества S_w и условия 3 определения 1 $f \in C_w^0(S_w) \overset{(10)}{=} C_w^0 \restriction_{S_w}$. Поэтому $B_w^0 \subset C_w^0 \restriction_{S_w}$, откуда с учетом (13) следует справедливость условия 3b).

3d) $\Rightarrow$ 3c). Пусть (см. (8)) $1/\lambda(R) := \inf_{x \in I_R \cap S_w} w(x) > 0$ $\forall R \geq R_0 > 0$, где $S_w \cap I_{R0} \neq \varnothing$. Тогда для таких значений R будем иметь $I_R \cap S_w \subseteq E_{\lambda(R)}(w)$, и в силу замкнутости множества $E_{\lambda(R)}(w)$ $I_R \cap \bar{S}_w \subseteq E_{\lambda(R)}(w) \subseteq S_w$. Поэтому $S_w = \bar{S}_w$ и в силу свойства 1 определения 1 для любой функции $f \in B_w^0$: $f \in C(I_R \cap S_w)$ $\forall R > R_0$. Таким образом, $B_w^0 \subseteq C(S_w)$ и условие 3c) верно.

Следствие 1 доказано.

4. Доказательство следствия 2 и теоремы 2. ***4.1. Доказательство следствия 2.*** Как уже отмечалось в п. 1.2, для произвольного веса $w \in \in \mathcal{B}_+(\mathbb{R})$ равенство (2) влечет, в частности,

$$\|f\|_w = \|f\|_{M_w} \qquad \forall f \in C_w^0(\mathbb{R}). \tag{23}$$

Если для некоторой функции $g : S_w \to \mathbb{R}$ справедливо соотношение (6), то для $\varepsilon = 1/p$, $p \geq 1$, на основании (6) мы получим последовательность $\{m_{1/p}\}_{p \geq 1} \subset C_w^0(\mathbb{R})$, сходящуюся к g по полунорме $\|\cdot\|_w$. Как было доказано в п. 1.2, $C_w^0(\mathbb{R}) \equiv C_{M_w}^0(\mathbb{R})$ и в силу (23) последовательность $\{m_{1/p}\}_{p \geq 1} \subset \subset C_{M_w}^0(\mathbb{R})$ будет фундаментальной в пространстве $C_{M_w}^0(\mathbb{R})$. Тогда согласно (9) и теореме 1 последовательность $\left\{m_{1/p} \restriction_{S_{M_w}}\right\}_{p \geq 1}$ является фундаментальной в банаховом пространстве $B_{M_w}^0$ и будет иметь там предел $G \in B_{M_w}^0$. При этом, очевидно, $G \restriction_{S_w} = g$. Необходимость утверждения следствия 1 доказана.

Предположим теперь, что для некоторой функции $g : S_w \to \mathbb{R}$ существует такая функция $G \in B^0_{M_w}$, что $G\restriction_{S_w} = g$. В силу теоремы 1 и уже упомянутого совпадения пространств $C^0_w(\mathbb{R})$ и $C^0_{M_w}(\mathbb{R})$ множество $\mathcal{M}\restriction_{S_{M_w}}$ будет плотным в банаховом пространстве $B^0_{M_w}$. Находя по заданному $\varepsilon > 0$ такой элемент $m_\varepsilon \in \mathcal{M}$, что $\left\| G - m_\varepsilon\restriction_{S_{M_w}} \right\|_w < \varepsilon$, мы в силу (9) и неравенств (1) получим справедливость соотношений (6).

Следствие 2 доказано.

4.2. Доказательство теоремы 2. Утверждение теоремы 2 совпадает с утверждением следствия 2 в случае, когда $\mathcal{M}$ является множеством всех алгебраических многочленов $\mathcal{P}(\mathbb{R})$. При этом условия 1 и 2 теоремы 2 совпадают соответственно с условиями 1 и 2 определения 1 банахова пространства $B^0_{M_w}$. Условие 3 определения 1 в формулировке теоремы 2 опущено, так как ввиду (7) оно следует из условия 2.

Теорема 2 доказана.

1. *Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г.* Функциональный анализ. – Киев: Выща шк., 1990. – 600 с.
2. *Edwards R. E.* Functional analysis. – Holt: Rinehart & Winston, 1965. – 1071 p.
3. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ. – М.: Наука, 1984. – 750 с.
4. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**. – С. 107–152.
5. *Bernstein S.* Le probleme de l'approximation des fonctions continues sur tout l'axe reel at l'une de ses applications // Bull. Math. France. – 1924. – **52**. – P. 399–410.
6. *Koosis P.* The logarithmic integral. I. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988. – 350 p.
7. *Berg Ch.* Moment problems and polynomial approximation // Ann. Fac. Sci. Toulouse, Stiltjes special issue. – 1996. – P. 9–32.
8. *Borichev A., Sodin M.* The Hamburger moment problem and weighted polynomial approximation on discrete subsets of the real line // J. Anal Math. – 1998. – **71**. – P. 219–264.
9. *Bakan A. G.* Polynomial density in $L_p(R^1, d\mu)$ and representation of all measures which generate a determinate Hamburger moment problem // Approximation, Optimization and Mathematical Economics / Ed. M. Lassonde. (Pointe-a-Pirte, 1999). – Heidelberg: Physica-Verlag, 2001. – P. 37–46.
10. *Ахиезер Н. И.* О взвешенном приближении непрерывных функций на всей числовой оси // Успехи мат. наук. – 1956. – **11**, № 4. – С. 107–152.
11. *Branges L.* The Bernstein problem // Proc. Amer. Math. Soc. – 1959. – **10**. – P. 825–832.
12. *Sodin M., Yuditskii P.* Another approach to de Branges' theorem on weighted polynomial approximation // Proc. Ashkelon Workshop Complex Function Theory, Israel Math. Conf. Proc. (May 1996). – Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1997. – **11**. – P. 221–227.
13. *Хачатрян И.* Весовая аппроксимация целых функций нулевой степени полиномами // Зап. Харьк. мат. о-ва. Сер. 4. – 1963. – **29**. – С. 129–142.
14. *Leviatan D., Shevchuk I.* Some positive results and counterexamples in comonotone approximation. II // J. Approxim. Theory. – 1999. – **100**, № 1. – P. 113–143.
15. *Энгелькинг Р.* Общая топология. – М.: Мир, 1986. – 751 с.
16. *Хейман У., Кеннеди П.* Субгармонические функции. – М.: Мир, 1980. – 304 с.
17. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. – М.: Наука, 1974. – 480 с.

Получено 18.01.2005