УДК 512.544

М. Р. Диксон (Ун-т Алабамы, Тускалуза, США),
Л. А. Курдаченко (Днепропетр. ун-т),
М. Эванс (Ун-т Алабамы, Тускалуза, США)

ЛИНЕЙНЫЕ ГРУППЫ С УСЛОВИЕМ МИНИМАЛЬНОСТИ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ПОДГРУПП

Let F be a field, A be a vector space over F, and let $GL(F, A)$ be the group of all automorphisms of the space A. If H is a subgroup of $GL(F, A)$, then put $\operatorname{aug}\dim_F(H) = \dim_F(A(\omega FH))$, where ωFH is an augmentation ideal of a group FH. A number $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ is called anaugmentation dimension of a subgroup H. In the present paper, we study locally soluble linear groups with the minimality condition for subgroups of infinite augmentation dimension.

Нехай F — поле, A — векторний простір над F, $GL(F, A)$ — група всіх автоморфізмів простору A. Якщо H — підгрупа $GL(F, A)$, то покладемо $\operatorname{aug}\dim_F(H) = \dim_F(A(\omega FH))$, де ωFH — фундаментальний ідеал групового кільця FH. Число $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ називається фундаментальною вимірністю підгрупи H. У даній роботі вивчаються локально розв'язні лінійні групи з умовою мінімальності для підгруп, що мають нескінченну фундаментальну вимірність.

Пусть F — поле, A — векторное пространство над F. Группа $GL(F, A)$ всех автоморфизмов A и ее различные подгруппы (линейные группы) — это один из старейших объектов исследований в теории групп. Первый естественный шаг в этом направлении — это рассмотрение линейных конечномерных групп, т. е. случая, когда A имеет конечную размерность над F. В этом случае группа $GL(F, A)$ — это по существу группа всех невырожденных $(n \times n)$-матриц над F, где $n = \dim_F A$. Теория конечномерных линейных групп является одной из самых развитых алгебраических теорий. Однако в случае, когда $\dim_F A$ бесконечна, ситуация совершенно иная. Изучение линейных групп в этом случае требует существенных дополнительных ограничений. Ситуация здесь похожа на сложившуюся в свое время в теории бесконечных групп. Один из подходов, который оказался весьма эффективным, связан с применением к изучению бесконечных групп условий конечности. Поэтому представляется естественным использовать этот подход и для изучения бесконечномерных линейных групп. Как показывает пример финитарных линейных групп, подход, связанный с применением условий конечности к изучению линейных групп, оказался весьма успешным. *Группа $G \leq GL(F, A)$ называется финитарной линейной группой, если для каждого элемента $g \in G$ подпространство $A(g-1)$ имеет конечную размерность* (*или, что эквивалентно, фактор-пространство $A / C_A(g)$ имеет конечную размерность*). Такие группы можно рассматривать как линейный аналог FC-групп (групп с конечными классами сопряженных элементов). Теория финитарных линейных групп интенсивно развивается сейчас, и уже получено много интересных результатов (см., например, обзор [1]).

Наша цель — изучение некоторых других типов условий конечности. Возвращаясь к теории групп с условиями конечности, можно напомнить, что одной из ее первых важных проблем была следующая проблема О. Ю. Шмидта: какой будет бесконечная группа, все собственные подгруппы которой конечны? Эта проблема во многом определила дальнейшее развитие теории групп с условиями конечности (см., например, [2]). Возникли следующие важные ее обобщения: проблема С. Н. Черникова о группах с условием минимальности для подгрупп и проблема Р. Бэра о группах с условием максимальности для подгрупп. Эти проблемы были решены при естественных дополнительных условиях, близких к обобщенной разрешимости. Однако в общем случае эти проблемы не решены. Более того, А. Ю. Ольшанский [3] (гл. 9) построил серию примеров, показывающих, что в общем случае описание групп Шмидта является весьма сложной задачей. Нашей целью является рассмотрение аналогов указанных проблем для бесконечномерных линейных групп. Точнее говоря, будем рассматривать классы линейных групп, которые возникают путем наложения условий конечности на системы бесконечномерных подгрупп. Но сначала определимся с аналогами обычных конечномерных подгрупп. Конечномерными линейными группами принято называть подгруппы $GL(F, A)$ в случае, если $\dim_F A$ конечна. Если же $\dim_F A$ бесконечна, то здесь возможны различные варианты. Рассмотрим один их них. Если H — подгруппа $GL(F, A)$, то H действует тривиально на фактор-пространстве $A/A(\omega FH)$ и подпространстве $C_A(H)$, т. е. H реально действует на подпространстве $A(\omega FH)$ и на фактор-пространстве $A/C_A(H)$, где ωFH — фундаментальный идеал группового кольца FH. Если $H = \langle g \rangle$, то размерности $\dim_F(A/C_A(g))$ и $\dim_F(A(g-1))$ совпадают. Если H конечно порождена, то можно утверждать, что конечность одной из размерностей $\dim_F(A/C_A(g))$ и $\dim_F(A(g-1))$ влечет конечность другой. В общем случае это не всегда так.

Будем говорить, что H *имеет конечную фундаментальную размерность, если* $\dim_F(A(\omega FH))$ *конечна. В этом случае число* $\dim_F(A(\omega FH))$ *будем называть фундаментальной размерностью подгруппы* H *и обозначать* $\operatorname{aug}\dim_F(H)$.

Отметим, что в этом определении существенным является то обстоятельство, что H — подгруппа конкретной линейной группы $GL(F, A)$. Можно построить вложения одной и той же группы H в различные общие линейные группы так, что в первом случае H имеет конечную фундаментальную размерность, а при втором вложении уже нет. Поэтому мы не можем говорить о классе линейных групп конечной фундаментальной размерности. Зафиксируем здесь поле F и векторное пространство A над ним и будем рассматривать только подгруппы $GL(F, A)$.

Пусть H имеет конечную фундаментальную размерность, т.е. $\dim_F(A(\omega FH))$ конечна, и положим $C = C_G(A(\omega FH))$. Очевидно C — нормальная подгруппа H и H/C изоморфна некоторой подгруппе $GL_n(F)$, где $n = \dim_F(A(\omega FH))$. Каждый элемент подгруппы C действует тождественно в каждом факторе ряда $\langle 0 \rangle \le A(\omega FH) \le A$, так что C — абелева подгруппа. Более того, если $\operatorname{char} F = 0$, то C не имеет кручения, если же $\operatorname{char} F = p > 0$, то A — элементарная абелева p-подгруппа. Таким образом, структура H в общем определяется структурой фактор-группы H/C, которая является конечномерной линейной группой в обычном смысле.

Пусть $G \le GL(F, A)$. Обозначим через $\mathcal{L}_{\mathrm{iad}}(G)$ семейство тех подгрупп G, которые имеют бесконечную фундаментальную размерность. В качестве первого естественного шага рассмотрим линейные группы, близкие к конечномерным, т. е. линейные группы G, в которых множество $\mathcal{L}_{\mathrm{iad}}(G)$ является „очень маленьким” в некотором смысле. Для бесконечных групп термин „быть очень маленьким” может иметь разнообразные трактовки. В свете упомянутой выше аналогии будем понимать под этим, что $\mathcal{L}_{\mathrm{iad}}(G)$ удовлетворяет некоторому условию конечности. Теперь естественно возникают следующие вопросы:

изучение линейных групп, в которых каждая собственная подгруппа имеет конечную фундаментальную размерность (линейный аналог проблемы О. Ю. Шмидта);

изучение линейных групп, в которых семейство подгрупп $\mathcal{L}_{\mathrm{iad}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности (линейный аналог проблемы С. Н. Черникова);

изучение линейных групп, в которых семейство подгрупп $\mathcal{L}_{\mathrm{iad}}(G)$ удовлетворяет условию максимальности (линейный аналог проблемы Р. Бэра).

В данной статье будем рассматривать локально разрешимые линейные группы, в которых семейство подгрупп $\mathcal{L}_{\mathrm{iad}}(G)$ удовлетворяет условию минимальности, — линейные группы с условием Min-iad.

1. Предварительные результаты. Рассмотрим сначала некоторые элементарные свойства произвольной группы $G \leq GL(F, A)$. Если $K \leq H \leq G$ и H имеет конечную фундаментальную размерность, то, очевидно, и K имеет конечную фундаментальную размерность. Пусть $U, V \leq G$. Предположим, что $\operatorname{aug}\dim_F(U)$ и $\operatorname{aug}\dim_F(V)$ конечны. Из равенства $a(xy-1) = a(x-1)\times$ $\times(y-1) - a(x-1) - a(y-1)$ следует включение $A(\omega F\langle U, V\rangle) \leq A(\omega FU) +$ $+ A(\omega FV)$, которое показывает, что $\langle U, V\rangle$ также имеет конечную фундаментальную размерность. Итак, имеет место следующая лемма.

1.1. Лемма. *Пусть* $G \leq GL(F, A)$.

1. *Если* $K \leq H \leq G$ *и* $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ *конечна, то и* $\operatorname{aug}\dim_F(K)$ *также конечна.*

2. *Если подгруппы* U *и* V *имеют конечные фундаментальные размерности, то и* $\operatorname{aug}\dim_F(\langle U, V\rangle)$ *будет конечной.*

1.2. *Следствие.* *Пусть* $G \leq GL(F, A)$. *Тогда подмножество*

$$FD(G) = \{x \in G / \langle x\rangle \text{ имеет конечную фундаментальную размерность}\}$$

является нормальной подгруппой G.

В самом деле, в силу леммы 1.1 $FD(G)$ — подгруппа. Пусть $x \in FD(G)$, $g \in G$. Поскольку $A(g^{-1}xg-1) = A(g^{-1}xg - g^{-1}1g) = Ag^{-1}(xg-g) = A(xg-g) =$ $= A(x-1)g$, то $A(x^g - 1)$ имеет конечную размерность.

Подгруппа $FD(G)$ *называется финитарным радикалом линейной группы* G.

Линейная группа G тогда и только тогда является финитарной, когда она совпадает со своим финитарным радикалом.

1.3. Лемма. *Пусть* $G \leq GL(F, A)$ *и удовлетворяет условию* Min-iad.

1. *Если* H — *подгруппа* G, *то* H *удовлетворяет условию* Min-iad.

2. *Если* $H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots$ — *бесконечная убывающая цепочка подгрупп, то найдется такой номер* d, *что* H_d *и каждая ее подгруппа имеют конечные фундаментальные размерности.*

3. *Если* H — *подгруппа бесконечной фундаментальной размерности, то упорядоченное по включению множество* $\mathcal{L}[H, B]$ *всех подгрупп, включающих* H, *удовлетворяет условию минимальности. В частности, если* H — *нормальная подгруппа* G, *то* G/H *удовлетворяет условию минимальности.*

Эти утверждения почти очевидны.

1.4. Лемма. *Пусть* $G \leq GL(F, A)$ *и удовлетворяет условию* Min-iad. *Пусть, далее,* X, H — *такие подгруппы* G, *что*:

1) $X = \times_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda$, *где* $\langle 1\rangle \neq X_\lambda$ — H-*инвариантная подгруппа* X *для каждого* $\lambda \in \Lambda$;

2) $H \bigcap A \leq \times_{\lambda\in\Gamma} X_\lambda$ *для некоторого подмножества* Γ *из* Λ.

Если $\Omega = \Lambda \setminus \Gamma$ *бесконечно, то* H *имеет конечную фундаментальную размерность.*

Доказательство. Предположим, что Ω бесконечно и $\Omega_1 \supset \Omega_2 \supset \ldots$ $\ldots \supset \Omega_n \supset \ldots$ — строго убывающая цепочка бесконечных подмножеств Ω. Поскольку $H \bigcap \times_{\lambda\in\Omega} X_\lambda = \langle 1\rangle$, цепочка подгрупп

$$\langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_1 \rangle > \langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_2 \rangle > \ldots > \langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_n \rangle > \ldots$$

будет строго убывающей, и согласно лемме 1.3 найдется такой номер d, что подгруппа $\langle H, X_\lambda \mid \lambda \in \Omega_d \rangle$ имеет конечную фундаментальную размерность. Но тогда и H имеет конечную фундаментальную размерность.

1.5. Лемма. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ и удовлетворяет условию* Min-iad. *Пусть, далее, H, K — подгруппы G, удовлетворяющие условиям*:

1) *K нормальна в H*;

2) *$H/K = \times_{\lambda \in \Lambda} H_\lambda / K$, причем $K < H_\lambda$ для всех $\lambda \in \Lambda$.*

Если множество индексов Λ бесконечно, то H имеет конечную фундаментальную размерность.

Доказательство. Допустим, что Λ бесконечно, и пусть Γ и Ω — такие бесконечные непересекающиеся подмножества Λ, что $\Gamma \bigcup \Omega = \Lambda$. Положим $U/K = \times_{\lambda \in \Gamma} H_\lambda / K$, $V/K = \times_{\lambda \in \Omega} H_\lambda / K$ и пусть $\Gamma_1 \supset \Gamma_2 \supset \ldots \supset \Gamma_n \supset \ldots$ — строго убывающая цепочка подмножеств Γ. Тогда получим следующую бесконечную убывающую цепочку подгрупп:

$$\langle V, H_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_1 \rangle > \langle V, H_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_2 \rangle > \ldots > \langle V, H_\lambda \mid \lambda \in \Gamma_n \rangle > \ldots .$$

Лемма 1.3 показывает, что V имеет конечную фундаментальную размерность. Аналогично, U также имеет конечную фундаментальную размерность и из равенства $H = UV$ согласно лемме 1.1 следует, что H также имеет конечную фундаментальную размерность.

1.6. Лемма. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ и удовлетворяет условию* Min-iad. *Пусть, далее, g — элемент бесконечного порядка группы G. Тогда $\langle g \rangle$ имеет конечную фундаментальную размерность.*

Доказательство. Пусть p, q — различные простые числа. Положим $u = g^p$, $v = g^q$. Последовательность подгрупп

$$\langle u \rangle > \langle u^2 \rangle > \ldots > \langle u^n \rangle > \ldots$$

будет строго бесконечной, так что найдется такой номер k, что $\langle u^k \rangle$ имеет конечную фундаментальную размерность. Аналогично, найдется такой номер t, что $\langle v^t \rangle$ имеет конечную фундаментальную размерность. Из равенства $\langle g \rangle = \langle u^k \rangle \langle v^t \rangle$ и леммы 1.1 получим теперь, что $\langle g \rangle$ также имеет конечную фундаментальную размерность.

Следующий результат описывает фактор-группу по коммутанту.

1.7. Предложение. *Пусть $G \leq GL(F, A)$ и удовлетворяет условию* Min-iad. *Если G имеет бесконечную фундаментальную размерность, то $G_{ab} = G/D$ является черниковской группой.*

Доказательство. Допустим, группа G_{ab} не является черниковской. Положим

$$\mathfrak{G} = \{ H \leq G \mid H \text{ имеет бесконечную фундаментальную размерность и } H_{ab} \text{ не является черниковской} \}.$$

Поскольку $G \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ — не пусто. Далее, так как множество $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию Min, оно имеет минимальный элемент D. Предположим, что $D = UV$ для некоторых таких собственных подгрупп U и V, что $U \bigcap V = [D, D]$. Если обе подгруппы U, V имеют конечные фундаментальные размерности, то согласно лемме 1.1 и D имеет конечную фундаментальную размерность. Поэтому можно допустить, что одна из них или обе имеют бесконечную фундаментальную размерность. Пусть, для определенности, U имеет бесконечную фундаментальную размерность. Тогда в силу выбора D $U/[U, U]$ будет черниковской. Поэтому и $U/[D, D] \cong (U/[U, U])/([D, D]/[U, U])$ будет черниковской. Поскольку U имеет бесконечную фундаментальную размерность, из леммы 1.3 видно, что D/U также будет черниковской. Отсюда получаем, что D_{ab} является черниковской, что противоречит выбору D.

Полученное противоречие показывает, что D_{ab} — неразложима. Но неразложимая абелева группа является квазициклической и, в частности, черниковской. Это финальное противоречие доказывает, что G_{ab} — черниковская.

2. Финитарные и нефинитарные линейные группы, удовлетворяющие условию Min-iad. В этом пункте рассмотрим вопрос о том, какие из линейных групп, удовлетворяющих условию Min-iad, будут финитарными, т. е. совпадают со своим финитарным радикалом.

2.1. Лемма. *Пусть* $G \le GL(F, A)$ *и удовлетворяет условию* Min-iad. *Тогда либо* G *— периодическая группа, либо она будет финитарной линейной группой.*

Доказательство. Предположим, что G не является ни периодической, ни финитарной. Положим

$$\mathfrak{G} = \{H \le G \mid H \text{ не является ни периодической, ни финитарной}\}.$$

Поскольку $G \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ — не пусто. Если H не финитарна, она имеет такой элемент h, что $\dim_F(A(h-1))$ бесконечна. Отсюда следует, что H имеет бесконечную фундаментальную размерность. Следовательно, семейство $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности. В свою очередь, отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}$ имеет минимальный элемент D. В силу леммы 1.6 каждый элемент D, имеющий бесконечный порядок, принадлежит $L = FD(D)$. Поскольку D непериодическая, то $L \ne \langle 1 \rangle$. Если S — такая подгруппа D, что $L \le S \le D$ и $S \ne D$, то S — финитарна, т. е. $S \le L$. Отсюда вытекает, что D/L имеет простой порядок q. Пусть x — такой элемент D, что $x \notin L$. Если a — элемент бесконечного порядка подгруппы L, то $\langle x, a \rangle$ не может быть периодической и финитарной. Следовательно, $\langle x, a \rangle = D$. Отсюда вытекает, что L — конечно порождена (см., например, [4], теорема 1.4). Поскольку L финитарна, то $\dim_F(A(\omega FL))$ — конечна.

Положим $C = A(\omega FL)$, тогда C — FD-подмодуль A, так как L нормальна в D. Если $R = C_D(A(\omega FL))$, то R нормальна в D, причем D/R изоморфна подгруппе $GL_r(F)$, где $r = \dim_F(A(\omega FL))$. Каждый элемент $R \cap L$ индуцирует тождественный автоморфизм в факторах ряда $\langle 0 \rangle \le C \le A$. Это означает, что $R \cap L$ — абелева, более того, она будет элементарной абелевой p-подгруппой, когда $\operatorname{char} F = p$ — простое число, и абелевой группой без кручения при $\operatorname{char} F = 0$. Если D/R бесконечна, то она финитно аппроксимируема (см., например, [5], теорема 4.2). Пусть U — нормальная в D подгруппа, имеющая конечный индекс. В частности, U не может быть периодической. Если допустить, что $\langle U, x \rangle \ne D$, то $\langle U, x \rangle$ финитарна и $x \in L$, что невозможно. Итак, $\langle U, x \rangle = D$ для каждой нормальной подгруппы U конечного индекса, в частности, D/U — циклическая. Обозначим через E пересечение всех подгрупп, имеющих конечный индекс в D, тогда D/E — абелева. Из финитной аппроксимируемости D/R получаем включение $E \le R$, так что и D/R — абелева. Имеем $R/(R \cap L) \cong RL/L$, т. е. $|R/(R \cap L)| \le q$. Следовательно, $D/(R \cap L)$ имеет конечный коммутант и конечно порождена. Отсюда вытекает, что $D/(R \cap L)$ — финитно аппроксимируема и, согласно доказанному выше, абелева. Выше также отмечалось, что $R \cap L$ — абелева. Итак, D — метабелева и, будучи конечно порожденной, финитно аппроксимируема (см., например, [6], теорема 9.51). Снова из доказанного выше вытекает, что D — абелева. Поскольку $D = \langle U, x \rangle$ для любой подгруппы U конечного индекса, D — бесконечная циклическая. Однако, как показывает лемма 1.6, в этом случае $\dim_F(A(\omega FD))$ конечна, т. е. получаем противоречие, что и доказывает лемму.

2.2. Лемма. *Пусть* G *— локально конечная подгруппа* $GL(F, A)$, *удовлетворяющая условию* Min-iad. *Тогда либо* G *удовлетворяет условию минимальности, либо* G *— финитарна.*

Доказательство. Предположим, что G не удовлетворяет условию Min и не является финитарной. Положим

$$\mathfrak{G} = \{ H \leq G \mid H \text{ не финитарна и не удовлетворяет условию Min} \}.$$

Поскольку $G \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ — не пусто. Если H не финитарна, она имеет такой элемент h, что $\dim_F(A(h-1))$ — бесконечна. Отсюда вытекает, что H имеет бесконечную фундаментальную размерность. Следовательно, семейство $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности. В свою очередь, отсюда следует, что $\mathfrak{G}$ имеет минимальный элемент D. Положим $L = FD(D)$. Поскольку D не удовлетворяет условию Min, D включает в себя абелеву подгруппу $W = \times_{n \in \mathbb{N}} \langle w_n \rangle$ (см., например, [7], теорема 5.8). В силу леммы 1.4 $\operatorname{aug}\dim_F(W)$ конечна, в частности, $W \leq L$. Отсюда вытекает, что L не удовлетворяет условию Min. Согласно принятому допущению $L \neq D$. Если $x \in D \setminus L$, то $\langle x, L \rangle$ не может быть финитарной. С другой стороны, $\langle x, L \rangle$ не удовлетворяет условию Min. Это означает, что $\langle x, L \rangle = D$. В свою очередь, D/L имеет простой порядок q, $D = \langle x, L \rangle$, где $x^q \in L$. Не ограничивая общности, можно допустить, что $|x| = q^t$ для некоторого натурального t. Если допустить, что $C_L(x)$ не является черниковской, то согласно лемме 1.4 $x \in L$, что невозможно. Итак, $C_L(x)$ — черниковская подгруппа. По теореме Б. Хартли [8] L включает в себя нормальную локально разрешимую подгруппу T конечного индекса. Можно допустить, что T — D-инвариантна. Согласно теореме Д. И. Зайцева [9] T включает в себя $\langle x \rangle$-инвариантную абелеву подгруппу $B = \times_{n \in \mathbb{N}} \langle b_n \rangle$. Не ограничивая общности, можно предположить, что $|b_n|$ — простое для каждого $n \in \mathbb{N}$. В этом случае каждая подгруппа B имеет дополнение. Пусть c_1 — произвольный неединичный элемент B, $C_1 = \langle c_1 \rangle^{\langle x \rangle}$, тогда C_1 — конечна. Имеем $B = C_1 \times E_1$. Из конечности $\langle x \rangle$, получаем, что множество $\{ E_1^y \mid y \in \langle x \rangle \}$ конечно. Пусть $\{ E_1^y \mid y \in \langle x \rangle \} = \{ E_{1,1}, \ldots, E_{1,k} \}$. Тогда $U_1 = E_{1,1} \cap \ldots \cap E_{1,k}$ — $\langle x \rangle$-инвариантна и имеет конечный индекс в B. Пусть $1 \neq c_2 \in U_1$, $C_2 = \langle c_2 \rangle^{\langle x \rangle}$, тогда C_2 — конечна, $\langle x \rangle$-инвариантна и $\langle C_1, C_2 \rangle = C_1 \times C_2$. Используя аналогичные рассуждения, можно построить семейство $\{ C_n \mid n \in \mathbb{N} \}$ конечных $\langle x \rangle$-инвариантных подгрупп B со свойством $\{ C_n \mid n \in \mathbb{N} \} = \times_{n \in \mathbb{N}} C_n$. Используя лемму 1.4, снова получаем включение $x \in L$, которое приводит к противоречию.

2.3. Лемма. *Пусть* G *— периодическая подгруппа* $GL(F, A)$, *удовлетворяющая условию* Min-iad. *Тогда либо* G *удовлетворяет условию минимальности, либо* G *— финитарна.*

Доказательство. Предположим, что G не удовлетворяет условию Min и не является финитарной. Положим

$$\mathfrak{G} = \{ H \le G \mid H \text{ не финитарна и не удовлетворяет условию Min} \}.$$

Поскольку $G \in \mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}$ — не пусто. Если H не финитарна, она имеет такой элемент h, что $\dim_F(A(h-1))$ — бесконечна. Отсюда вытекает, что H имеет бесконечную фундаментальную размерность. Следовательно, семейство $\mathfrak{G}$ удовлетворяет условию минимальности. В свою очередь, отсюда вытекает, что $\mathfrak{G}$ имеет минимальный элемент D. Положим $L = FD(D)$. Поскольку D не удовлетворяет условию Min, D имеет бесконечную строго убывающую цепочку подгрупп $H_1 > H_2 > \ldots > H_n > \ldots$. Согласно лемме 1.3 получаем существование такого номера d, что H_d и каждая ее подгруппа имеют конечную фундаментальную размерность. В частности, это имеет место для каждой циклической подгруппы H_d, и поэтому $H_d \le L$. Так как H_d не удовлетворяет условию Min, это справедливо и для L. Если $x \in D \setminus L$, то $\langle x, L \rangle$ не финитарна. С другой стороны, $\langle x, L \rangle$ не удовлетворяет условию Min. Это означает, что $\langle x, L \rangle = = D$. В свою очередь, как и ранее, D/L имеет простой порядок q, т. е. $D = = \langle x, L \rangle$, где $x^q \in L$. Поскольку L — периодическая финитарная линейная группа, то L — локально конечна. Но в этом случае и D — локально конечна, т. е. получили противоречие с леммой 2.2.

Следствием доказанных выше результатов является следующая теорема.

2.4. Теорема. *Пусть G — подгруппа $GL(F, A)$, удовлетворяющая условию* Min-iad. *Тогда либо G удовлетворяет условию минимальности, либо G — финитарная линейная группа.*

3. Локально разрешимые линейные группы, удовлетворяющие условию Min-iad. Известно, что локально разрешимая конечномерная линейная группа разрешима. В настоящем пункте мы расширим этот результат на локально разрешимые линейные группы, удовлетворяющие условию Min-iad. Отметим, что если H — локально разрешимая подгруппа $GL(F, A)$, имеющая конечную фундаментальную размерность, то $H/C_H(A(\omega FH))$ — разрешима (см. , например, [5], следствие 3.8), а так как $C_H(A(\omega FH))$ — абелева, то H — разрешима. Будем рассматривать локально разрешимые подгруппы $GL(F, A)$, имеющие бесконечную фундаментальную размерность и удовлетворяющие условию Min-iad.

3.1. Лемма. *Пусть G — локально разрешимая подгруппа $GL(F, A)$, имеющая бесконечную фундаментальную размерность и удовлетворяющая условию* Min-iad. *Тогда либо G — разрешима, либо G имеет такой возрастающий ряд нормальных подгрупп*

$$\langle 1 \rangle = S_0 \le S_1 \le \ldots \le S_n \le \ldots \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = S_\omega \le G,$$

что $\operatorname{aug}\dim_F(S_n)$ *— конечна и S_{n+1}/S_n — абелева для $n \ge 0$. Более того, G/S_ω — разрешимая черниковская группа.*

Доказательство. Покажем сначала, что G — гиперабелева. Для этого достаточно показать, что каждая неединичная фактор-группа G включает в себя неединичную нормальную абелеву подгруппу.

Пусть H — собственная нормальная подгруппа G. Сначала рассмотрим случай, когда H имеет бесконечную фундаментальную размерность. Тогда G/H — локально разрешимая группа, удовлетворяющая условию Min согласно лемме 1.3; такие группы будут черниковскими, в частности, они включают неединичную нормальную абелеву подгруппу. Теперь допустим, что H имеет конечную фундаментальную размерность. Будучи локально разрешимой, G/H имеет систему $\mathfrak{H} = \{ \Lambda_\sigma/H, V_\sigma/H \mid \sigma \in \Sigma \}$ нормальных подгрупп с абелевыми факторами (см., например, [6], следствие теоремы 8.23). Обозначим через Σ_1 подмножество таких индексов σ, что Λ_σ имеет бесконечную фундаментальную размерность, а через Σ_2 подмножество таких индексов σ, что V_σ имеет бесконечную фундаментальную размерность. Поскольку G удовлетворяет условию Min-iad, то $\{\Lambda_\sigma | \sigma \in \Sigma_1\}$ (соответственно $\{V_\sigma | \sigma \in \Sigma_2\}$) имеет минимальный элемент Λ_μ (соответственно V_ν). Выше отмечалось, что локально разрешимые подгруппы, имеющие конечную фундаментальную размерность, разрешимы, т. е. Λ_σ разрешима для $\sigma < \mu$ (соответственно V_σ разрешима для $\sigma < \nu$). Отсюда вытекает, что G/H включает в себя неединичную нормальную абелеву подгруппу, так что G — гиперабелева. Пусть

$$\langle 1 \rangle = H_0 \le H_1 \le \ldots \le H_\alpha \le H_{\alpha+1} \le \ldots \le H_\gamma$$

— возрастающий ряд нормальных подгрупп с абелевыми факторами и α — наименьшее порядковое число, для которого H_α имеет бесконечную фундаментальную размерность. Как и выше, H_β разрешима для каждого $\beta < \alpha$. Кроме того, и G/H_α — разрешимая черниковская группа согласно лемме 1.3.

Сначала рассмотрим случай, когда α не является предельным. Очевидно, что тогда H_α будет разрешимой подгруппой, так что и G — разрешима. Пусть теперь α — предельное порядковое число и G не является разрешимой. Для каждого номера d существует такое порядковое число $\beta(d)$, что $H_{\beta(d)}$ имеет ступень разрешимости не меньше d. Более того, можно допустить, что $\beta(j) < \beta(j+1)$ для всех j. Положим $T_j = H_{\beta(j)}$, тогда $\langle 1 \rangle = T_0 \le T_1 \le \ldots \le T_j \le T_{j+1} \le \ldots$ — возрастающий ряд нормальных разрешимых подгрупп G. Уплотняя теперь этот ряд, получаем ряд, удовлетворяющий условиям леммы.

Если G — группа, то через $G_{\mathfrak{F}}$ обозначим пересечение всех ее подгрупп конечного индекса.

3.2. Лемма. *Пусть G — финитарная подгруппа $GL(F, A)$, имеющая бесконечную фундаментальную размерность и удовлетворяющая условию* Min-iad. *Тогда $G/G_{\mathfrak{F}}$ — конечна.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. $G/G_{\mathfrak{F}}$ — бесконечна. Тогда G имеет такой бесконечный убывающий ряд нормальных подгрупп

$$G \ge H_1 > \ldots > H_n > \ldots ,$$

что G/H_n конечна при любом n. Но тогда найдется такой номер k, что G/H_k — конечна и при этом H_k имеет конечную фундаментальную размерность. Поскольку G — финитарна, найдется такая подгруппа L, имеющая конечную фундаментальную размерность, что $G = H_k L$. Лемма 1.1 показывает, что и G также имеет конечную фундаментальную размерность, а это противоречит условию леммы.

Следующий результат показывает, что подгруппа S_ω, фигурирующая в лемме 3.1, разрешима.

3.3. Лемма. *Пусть G — подгруппа $GL(F, A)$, имеющая бесконечную фундаментальную размерность и удовлетворяющая условию* Min-iad. *Если G имеет такой возрастающий ряд нормальных подгрупп*

$$\langle 1 \rangle = S_0 \le S_1 \le \ldots \le S_n \le \ldots \bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n = G,$$

что каждая подгруппа S_n имеет конечную фундаментальную размерность и каждый фактор S_{n+1}/S_n — абелев, то G — разрешима.

Доказательство. Поскольку $A(\omega F S_k)$ конечномерна, существует конечный ряд FG-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_{n(k)} = A(\omega F S_k),$$

каждый фактор которого является простым FG-модулем. Далее, S_{k+1} также имеет конечную фундаментальную размерность, так что можно расширить указанный выше ряд до ряда FG-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_{n(k)} \leq A_{n(k)+1} \leq \ldots \leq A_{n(k+1)} = A(\omega F S_{k+1}),$$

каждый фактор которого является простым FG-модулем, и таким путем получим бесконечный возрастающий ряд FG-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = A_0 \leq A_1 \leq \ldots \leq A_m \leq A_{m+1} \leq \ldots \leq A_\omega = A(\omega F G)$$

с простыми факторами.

Положим $N = \bigcap_{j \geq 0} C_G(A_{j+1}/A_j)$. Фактор-группа $G/C_G(A_{j+1}/A_j)$ является неприводимой конечномерной линейной локально разрешимой группой, а потому она почти абелева при любом j (см., например, [5], лемма 3.5). Из вложения $G/H \to \prod_{j \geq 0} G/C_G(A_{j+1}/A_j)$ следует, что G/H будет расширением абелевой нормальной подгруппы с помощью финитно аппроксимируемой. Кроме того, G, будучи объединением возрастающей последовательности подгрупп, имеющих конечную фундаментальную размерность, финитарна, и лемма 3.2 доказывает, что G/H — почти абелева. Обозначим через K/H нормальную абелеву подгруппу G/H, для которой G/K — конечна. Тогда K имеет бесконечную фундаментальную размерность, и K/H будет черниковской в силу предложения 1.7. Если $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ — конечна, то $H/C_H(A(\omega F H))$ — разрешима (см., например, [5], следствие 3.8), а так как $C_H(A(\omega F H))$ — абелева, то H — разрешима, а тогда разрешимой будет и вся группа G.

Таким образом, теперь можно предположить, что H имеет бесконечную фундаментальную размерность. Рассмотрим сначала случай, когда $\operatorname{char} F = 0$. Положим $L_j = C_G(A_1/A_0) \bigcap C_G(A_2/A_1) \bigcap \ldots \bigcap C_G(A_j/A_{j-1})$, $j \in \mathbb{N}$. Если $H \neq$ $\neq L_j$ для некоторого j, можно предположить, что j является минимальным номером, для которого H действует тождественно на факторах A/A_j и A_j/A_{j-1}. Отсюда следует, что H имеет нееденичную абелеву фактор-группу без кручения, что противоречит предложению 1.7. Поэтому $H = L_j$ для всех j, а это влечет тот факт, что H — абелева. Наконец предположим, что $\operatorname{char} F =$ $= p > 0$, и отметим, что каждая L_j/L_{j+1} является элементарной абелевой p-группой. Сначала допустим, что найдется такой номер j, что $\operatorname{aug}\dim_F(L_j)$ — конечна. Также можно допустить, что этот номер j будет минимальным, так что L_{j-1} имеет бесконечную фундаментальную размерность. Из того факта, что $L_{j-1}/[L_{j-1}, L_{j-1}]$ — черниковская, получаем, что L_{j-1}/L_j — конечна. Однако L_{j-1} финитарна, а отсюда получаем, что L_{j-1} имеет конечную фундаментальную размерность, т. е. получаем противоречие. Таким образом, каждая подгруппа L_j имеет бесконечную фундаментальную размерность. Как и выше, можно показать, что каждая L_j/L_{j+1} — конечна. Из условия Min-iad получаем, что существует такое k, что $L_j = L_k$ для всех $j \geq k$. Очевидно, L_k — разрешима, и из конечности H/L_k теперь вытекает, что H — разрешима. Как и выше, отсюда получаем, что и вся группа разрешима.

Следствием доказанных выше результатов является следующая теорема.

3.4. Теорема. *Пусть* G *— локально разрешимая подгруппа* $GL(F, A)$, *удовлетворяющая условию* Min-iad. *Тогда* G *— разрешима.*

4. Локально разрешимые линейные группы, удовлетворяющие условию Min-iad. Основной целью этого пункта является описание разрешимых линейных групп, удовлетворяющих условию Min-iad.

4.1. Лемма. *Пусть* G *— делимая черниковская* q*-подгруппа* $GL(F, A)$, *где* q *— простое число. Если* G *— финитарна, то* $q \neq \operatorname{char} F$.

Доказательство. Предположим противное. Для любого $1 \neq g \in G$ рассмотрим отображение $\theta_g : A \to A$, определенное по правилу $\theta_g(a) = a(g-1)$. Поскольку G — абелева, то θ_g — FG-эндоморфизм A. Тогда $\operatorname{Im}\theta_g = A(g-1)$ и $\operatorname{Ker}\theta_g = C_A(g)$ — FG-подмодули A. Из конечномерности $A_1 = A(g-1)$ получаем существование конечного ряда G-инвариантных подпространств

$$\langle 0 \rangle = B_0 \leq B_1 \leq \ldots \leq B_n = A_1,$$

каждый фактор которого будет простым FG-модулем. Если $x \in G$, то $C_A(x) \bigcap B_1$ — FG-подмодуль B_1 (так как G — абелева). Из того факта, что x — q-элемент, а B_1 — элементарная абелева q-подгруппа, получаем нильпотентность естественного полупрямого произведения $B_1 \rtimes \langle x \rangle$ (см., например, [6], лемма 6. 34). Тогда $C_A(x) \bigcap B_1 \neq \langle 0 \rangle$ и, учитывая простоту FG-подмодуля B_1, получаем включение $B_1 \leq C_A(x)$. Пусть $C_1 = \zeta_{FG}(A) = \{ a \in A \mid ay = a$ для каждого $y \in G \}$ — FG*-центр* A. Сразу отметим, что $C_1 \neq \langle 0 \rangle$, ибо $B_1 \leq C_1$. Можно построить верхний FG-центральный ряд $\langle 0 \rangle = C_0 \leq C_1 \leq \ldots \leq C_\alpha \leq$ $\leq C_{\alpha+1} \leq \ldots \leq C_\gamma = A$ модуля A. Здесь $C_{\alpha+1}/C_\alpha = \zeta_{FG}(A/C_\alpha)$, $\alpha < \gamma$, и $C_\beta =$ $= \bigcup_{\gamma<\beta} C_\gamma$ для предельных порядковых β. Естественное полупрямое произведение $A \rtimes G$ является гиперцентральной q-группой. Из леммы 3 работы [11] вытекает равенство $A = \zeta_{FG}(A)$. Но тогда $G = \langle 1 \rangle$, и это противоречие доказывает лемму.

4.2. Предложение. *Пусть* G *— подгруппа* $GL(F, A)$, *имеющая бесконечную фундаментальную размерность и удовлетворяющая условию* Min-iad. *Предположим также, что* G *— почти локально разрешима и не является черниковской. Тогда*:

1) *если* $\operatorname{char} F = p > 0$, *то* G *включает в себя такую нормальную нильпотентную ограниченную* p*-подгруппу* H, *что* G/H *— черниковская и ее делимая часть является* p'*-группой*;

2) *если* $\operatorname{char} F = 0$, *то* G *включает в себя такую нормальную нильпотентную подгруппу без кручения* H, *что* G/H *— черниковская.*

Кроме того, если G *— не черниковская, то* H *имеет конечную фундаментальную размерность.*

Доказательство. Можно считать, что G не удовлетворяет условию Min. Теорема 2.4 показывает, что G — финитарная линейная группа. Обозначим через S нормальную локально разрешимую подгруппу, имеющую конечный индекс в G. Согласно лемме 1.1 $\operatorname{aug}\dim_F(S)$ — бесконечна. Теорема 3.4 доказывает, что S — разрешима. Пусть $S = D_0 \geq D_1 \geq \ldots \geq D_n = \langle 1 \rangle$ — ряд коммутантов S. Найдется такой номер m, что $\operatorname{aug}\dim_F(D_m)$ — бесконечна, но $\operatorname{aug}\dim_F(D_{m+1})$ — конечна. Из предложения 1.7 получаем, что D_j/D_{j+1} — черниковская при $0 \leq j \leq m$. Положим $U = D_{m+1}$ и отметим, что G/U — черниковская группа. Пусть $C = A(\omega FU)$. Отметим, что C — FG-подмодуль A. Из выбора U получаем, что C имеет конечную размерность, поэтому существует такой конечный ряд FG-подмодулей

$$\langle 0 \rangle = C_0 \le C_1 \le \ldots \le C_t = C \le C_{t+1} = A,$$

что $C_1/C_0, C_2/C_1, \ldots, C_t/C_{t-1}$ — простые FG-модули. Поскольку G почти разрешима, то применение теорем Клиффорда и Мальцева (см., например, [5], теорема 1.15 и лемма 3.5) показывает, что $G/C_G(C_{j+1}/C_j)$, $0 \le j \le t-1$, — почти абелевы. Положим $Q = C_G(C_1) \bigcap C_G(C_2/C_1) \bigcap \ldots \bigcap C_G(C_t/C_{t-1})$ и отметим, что и G/Q — почти абелева. Пусть V — нормальная подгруппа конечного индекса, для которой V/Q — абелева. В силу теоремы 2.4 G — финитарна, а поэтому $\operatorname{aug}\dim_F(V)$ — бесконечна. Предложение 1.7 показывает, что V/Q, а потому и G/Q — черниковские.

Предположим сначала, что $\operatorname{char} F = p > 0$. Поскольку G финитарна и U действует тождественно в факторе A/C, то $G/C_G(A/C)$ вкладывается в $FD(GL(F, A/C))$. Включение $U \le C_G(A/C)$ показывает, что $G/C_G(A/C)$ — черниковская, и из леммы 4.1 получаем, что делимая часть $G/C_G(A/C)$ будет p'-группой. К тому же и $O_p(G/C_G(C_{j+1}/C_j)) = \langle 1 \rangle$, $0 \le j \le t-1$ [11] (теорема 3.1.3). Отсюда получаем, что и делимая часть G/Q будет p'-группой. Положим $H = Q \bigcap C_G(A/C)$. Поскольку H действует тождественно на каждом факторе C_{j+1}/C_j, $0 \le j \le t$, то H — нильпотентна. Кроме того, H не имеет кручения, если $\operatorname{char} F = 0$, и H — ограниченная p-подгруппа, если $\operatorname{char} F = p > 0$.

Если $\operatorname{char} F = p > 0$, то H — бесконечная нильпотентная p-подгруппа, а в этом случае $H/[H, H]$ — бесконечна (см., например, [4], лемма 2.22). Согласно теореме Прюфера (см., например, [12], теорема 17.2) $H/[H, H]$ — прямое произведение бесконечного множества циклических p-подгрупп. В силу леммы 1.5 H имеет конечную фундаментальную размерность. Пусть теперь $\operatorname{char} F = 0$. В этом случае H — нильпотентная подгруппа без кручения, поэтому H имеет центральный ряд с факторами без кручения (см., например, [4], теорема 2. 25). В частности, $H/[H, H]$ — не периодическая. Если допустить, что $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ бесконечна, то предложение 1.7 показывает, что $H/[H, H]$ — черниковская. Это противоречие показывает, что $\operatorname{aug}\dim_F(H)$ — конечна, что и завершает доказательство.

Теперь можно получить следующее описание разрешимых линейных групп, удовлетворяющих условию Min-iad.

4.3. Теорема. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$ и G — почти локально разрешимая подгруппа $GL(F, A)$, имеющая бесконечную фундаментальную размерность. Если G удовлетворяет условию* Min-iad *и не является черниковской, то G имеет ряд нормальных подгрупп $P \le D \le G$, которые удовлетворяют следующим условиям*:

i) *P — нильпотентная ограниченная p-подгруппа*;

ii) *$D = P \rtimes Q$ для некоторой неединичной делимой черниковской p'-подгруппы Q, а G/D — конечна*;

iii) *P имеет конечную фундаментальную размерность и удовлетворяет условию* Min-Q *(условию минимальности для Q-инвариантных подгрупп), а Q имеет бесконечную фундаментальную размерность.*

В частности, G — расширение нильпотентной подгруппы с помощью почти абелевой, удовлетворяющее условию минимальности для нормальных подгрупп.

Доказательство. Предложение 4.2 показывает, что G включает в себя такую нормальную нильпотентную ограниченную p-подгруппу P, что G/P — черниковская и ее делимая часть D/P является p'-группой. Кроме того, так как G не черниковская, то $\operatorname{aug}\dim_F(P)$ — конечна. Существует подгруппа Q со свойством $D = P \rtimes Q$ [7], где $Q \cong D/P$ — делимая черниковская p'-подгруппа, а G/D — конечна. Если допустить, что $Q = \langle 1 \rangle$, то из того факта, что G финитарна (теорема 2.4), а G/D конечна, получаем конечность $\operatorname{aug}\dim_F(G)$, что невозможно. Итак, $Q \neq \langle 1 \rangle$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{aug}\dim_F(Q)$ — бесконечна. Поскольку PQ удовлетворяет условию Min-iad, P должна удовлетворять условию Min-Q, а это доказывает, что D удовлетворяет условию Min-n. Из конечности G/D вытекает, что G также удовлетворяет условию Min-n.

Применяя теорему 4.3, можно получить описание почти локально разрешимых групп бесконечной фундаментальной размерности, все собственные подгруппы которых имеют конечную фундаментальную размерность для случая поля простой характеристики.

4.4. Теорема. *Пусть F — поле характеристики $p > 0$ и G — почти локально разрешимая подгруппа $GL(F, A)$, имеющая бесконечную фундаментальную размерность. Если любая собственная подгруппа G имеет конечную фундаментальную размерность, то G — квазициклическая q-группа для некоторого простого $q \neq p$.*

Доказательство. Рассматривая неединичную подгруппу Q, фигурирующую в теореме 2.3, получаем, что G — черниковская. Если делимая часть G является собственной подгруппой, то она имеет конечную фундаментальную размерность, а тогда и G имеет конечную фундаментальную размерность, что невозможно. Итак, G — делима. Поскольку G, очевидно, прямо неразложима, то она квазициклическая. Применение леммы 4.1 завершает доказательство.

Покажем, что группы, полученные в теореме 4.3, действительно могут быть реализованы как линейные группы, удовлетворяющие условию Min-iad. Пусть $F_0 = \mathbb{F}_p$, где p — простое число, или $F_0 = \mathbb{Q}$. Обозначим через K алгебраическое замыкание F_0. Мультипликативная группа $U(K)$ — делима, поэтому она включает в себя квазициклическую q-подгруппу $Q = \langle x_n \mid x_1^q = 1,\ x_{n+1}^q = x_n,$ $n \in \in \mathbb{N} \rangle$, где q — простое число, $q \neq p$.

Пусть $F = F_0[Q]$. Поскольку каждый элемент Q алгебраичен над F_0, F — подполе K. Положим $A = \oplus_{n \in \mathbb{N}} A_n$, где $A_n \cong F$ для каждого $n \in \mathbb{N}$. Любой автоморфизм A определяет (в стандартном базисе) некоторую бесконечную матрицу $\alpha = \| u_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}$ Определим матрицы $\kappa_n = \| u_{jm}^{(n)} \|_{j,m \in \mathbb{N}}$ по следующему правилу:

$$u_{11}^{(1)} = x_1,\ u_{jj}^{(1)} = 1 \text{ для всех } j > 1,\ u_{jm}^{(1)} = 0 \text{ для всех остальных } j, m;$$

$$u_{11}^{(2)} = x_2,\ u_{22}^{(2)} = x_1,\ u_{jj}^{(2)} = 1 \text{ для всех } j > 2,\ u_{jm}^{(2)} = 0 \text{ для всех остальных } j, m;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u_{11}^{(n)} = x_n,\ u_{22}^{(n)} = x_{n-1}, \ldots, u_{n,n}^{(n)} = x_1,\ u_{jj}^{(n)} = 1 \text{ для всех } j > n,$$

$$u_{jm}^{(n)} = 0 \text{ для всех остальных } j, m.$$

Очевидно, $\kappa_1^q = \varepsilon$ (ε — единичная матрица), $\kappa_{n+1}^q = \kappa_n$, $n \in \mathbb{N}$. Другими словами, $K = \langle \kappa_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ — квазициклическая q-подгруппа. Также понятно, что $A(\kappa_1 - \varepsilon) = A_1$, $A(\kappa_2 - \varepsilon) = A_1 + A_2, \ldots, A(\kappa_n - \varepsilon) = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Каждая собственная подгруппа K совпадает с некоторой $\langle \kappa_n \rangle$, поэтому любая собственная подгруппа K имеет конечную фундаментальную размерность. Однако $A(\omega FK) = A$ и, следовательно, $\operatorname{aug}\dim_F(K)$ — бесконечна.

Теперь рассмотрим множество Σ всех матриц $\alpha = \| u_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}$, имеющих следующее свойство:

$$u_{jm} = 0, \quad \text{если} \quad (j, m) \notin \{ (1,2), (j,j) \mid j \in \mathbb{N} \}.$$

Если $\beta = \| v_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}$ — другая матрица из Σ, то

$$\alpha\beta = \| w_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}, \quad \text{где} \quad w_{jj} = u_{jj} v_{jj}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad w_{12} = u_{11} v_{12} + u_{12} v_{22}.$$

Отсюда следует, что $\alpha\beta \in \Sigma$. Кроме того, если $\alpha^{-1} = \| y_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}$, то

$$y_{jj} = u_{jj}^{-1}, \quad j \in \mathbb{N}, \quad y_{12} = u_{11}^{-1} v_{22}^{-1} u_{12},$$

в частности, $\alpha^{-1} \in \Sigma$. Итак, Σ — подгруппа. Рассмотрим теперь множество Φ всех матриц $\alpha = \| u_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}$, имеющих следующее свойство:

$$u_{jj} = 1 \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}, \quad u_{jm} = 0, \quad \text{если} \quad (j, m) \notin \{ (1,2) \}.$$

Если $\beta = \| v_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}$ — другая матрица из Φ, то

$$\alpha\beta = \| w_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}, \quad \text{где} \quad w_{jj} = 1 \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}, \quad w_{12} = v_{12} + u_{12}.$$

Отсюда получаем, что $\alpha\beta \in \Phi$. Легко видеть, что Φ изоморфна аддитивной группе поля F. Пусть $\alpha = \| u_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}} \in \Sigma$, $\beta = \| v_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}} \in \Phi$, тогда

$$\alpha^{-1}\beta\alpha = \| w_{jm} \|_{j,m \in \mathbb{N}}, \quad \text{где} \quad w_{jj} = 1 \quad \text{для всех} \quad j \in \mathbb{N}, \quad w_{12} = u_{11}^{-1} u_{22} v_{12}.$$

Это показывает, что Φ — нормальная подгруппа Σ. Положим $\Gamma = \Phi \rtimes K$. Вследствие построения F Φ — минимальная нормальная подгруппа Γ. Далее, очевидно, что $A(\omega F\Phi) = A_1 + A_2$, так что Φ имеет конечную фундаментальную размерность.

Заметим, что второй пример можно немного усложнить таким образом, что его унипотентная нормальная подгруппа Φ будет нильпотентной любой наперед заданной ступени нильпотентности.

Перейдем к случаю нулевой характеристики.

4.5. Теорема. *Пусть F — поле характеристики* 0 *и G — почти локально разрешимая подгруппа $GL(F, A)$, имеющая бесконечную фундаментальную размерность. Если G удовлетворяет условию* Min-iad, *то G — черниковская группа.*

Доказательство. Ввиду предложения 4.2 G включает в себя такую нормальную подгруппу P, что $\operatorname{aug}\dim_F(P)$ — конечна, P — нильпотентна и не имеет кручения, а G/P — черниковская. Отсюда видно, что если G периодическая, то она черниковская. Предположим, что G не является периодической. Положим

$$\mathfrak{S} = \{ H \leq G \mid H \text{ — непериодическая и } \operatorname{aug}\dim_F(H) \text{ — бесконечна} \}.$$

Поскольку $G \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{S}$ — не пусто. Так как семейство $\mathfrak{S}$ удовлетворяет условию минимальности, S имеет минимальный элемент D. В силу выбора D — непериодическая подгруппа, в частности, D не удовлетворяет условию Min.

Пусть S — максимальная нормальная разрешимая подгруппа. Теорема 2.4 показывает, что D — финитарна. Поэтому $\operatorname{aug}\dim_F(S)$ — бесконечна. Очевидно, S не может быть периодической. Отсюда получаем, что $D = S$, т. е. D — разрешима. В силу предложения 4.2 D включает в себя такую нормальную подгруппу U, что $\operatorname{aug}\dim_F(U)$ — конечна, U — нильпотентна и не имеет кручения, а D/U — черниковская. Легко видеть, что D/U — делима. Если D/U не квазициклическая, то $D/U = D_1/U \times D_2/U$, где D_1/U, D_2/U — неединичные делимые подгруппы. Так как обе подгруппы D_1, D_2 непериодические, то из выбора D вытекает, что обе они имеют конечную фундаментальную размерность. Равенство $D = D_1 D_2$ и лемма 1.1 приводят к тому, что $\operatorname{aug}\dim_F(D)$ — конечна. Это противоречие показывает, что D/U — квазициклическая q-группа для некоторого простого q. Пусть V — собственная подгруппа D. Если V — периодическая, то она черниковская и, в частности, почти абелева. Допустим теперь, что V не периодическая. Тогда $\operatorname{aug}\dim_F(V)$ — конечна. Если предположить, что $D = UV$, то лемма 1.1 снова показывает, что $\operatorname{aug}\dim_F(D)$ — конечна. Следовательно, $V/(V \cap U) \cong UV/U$ — циклическая q-группа. В частности, V — почти нильпотентна. Итак, любая собственная подгруппа D почти нильпотентна. Тогда из теоремы 2.5 [13] вытекает, что D — периодическая. Полученное противоречие и доказывает тот факт, что G — периодическая, а значит, черниковская группа.

4.6. *Следствие.* *Пусть F — поле характеристики 0 и G — почти локально разрешимая подгруппа $GL(F, A)$, имеющая бесконечную фундаментальную размерность. Если любая собственная подгруппа G имеет конечную фундаментальную размерность, то G — квазициклическая q-группа для некоторого простого q.*

1. *Phillips R. E.* Finitary linear groups: a survey // Finite and Locally Finite Groups. Nato ASI. Ser. C471. – Dordrecht: Kluwer, 1995. – P. 111 – 146.
2. *Черников С. Н.* О проблеме Шмидта // Укр. мат. журн. – 1971. – **23**, № 5. – С. 598 – 603.
3. *Ольшанский А. Ю.* Геометрия определяющих соотношений в группах. – М.: Наука, 1989.
4. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions in generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – Pt 1.
5. *Wehrfritz B. A. F.* Infinite linear groups. – Berlin: Springer, 1972.
6. *Robinson D. J. S.* Finiteness conditions in generalized soluble groups. – Berlin: Springer, 1972. – Pt 2.
7. *Kegel O. H., Wehrfritz B. A. F.* Locally finite groups. – Amsterdam: North-Holland, 1973.
8. *Hartley B.* Fixed points of automorphisms of certain locally finite groups and Chevalley groups // J. London Math. Soc. – 1988. – **37**. – P. 421 – 436.
9. *Зайцев Д. И.* О локально разрешимых группах конечного ранга // Докл. АН СССР. – 1978. – **240**, № 2. – С. 257 – 259.
10. *Курдаченко Л. А.* Локально нильпотентные группы со слабым условием минимальности для нормальных подгрупп // Сиб. мат. журн. – 1984. – **25**, № 4. – С. 589 – 594.
11. *Gorenstein D.* Finite groups. – New York: Harper&Row Publ., 1968.
12. *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. – М. Мир, 1974. – Т. 1.
13. *Bruno B., Phillips R. E.* A note on groups with nilpotent-by-finite proper subgroups // Arch. Math. – 1995. – **65**. – P. 369 – 374.

Получено 19.04.2004